النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة

القياس الستيني للزاوية :

الدرجة = ٦٠دقيقة (١° = ٦٠َ) ، الدقيقة = ٦٠ ثانية (١َ = ٦٠ً)

مثال ١ : ① اكتب الزاوية ٥٦ً ٣َ ٤٥° بالدرجات

(الحل) ٤٥ " ٣ " ٥٦ " = " ⟹ ٤٥,٠٦٦°

② اكتب الزاوية ٥٦,٠٨° بالدرجات والدقائق والثواني (بالقياس الستيني)

(الحل) ٥٦,٠٨° = " ⟹ ٥٦° ٤َ ٤٨ً

ملاحظات هامة :

① مجموع قياسي الزاويتين المتتامتين = ٩٠°
② مجموع قياسي الزاويتين المتكاملتين = ١٨٠°
③ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

مثال ٢ : إذا كانت النسبة بين قياسي زاويتين متكاملتين كنسبة ٣ : ٥

أوجد : مقدار كل منهما بالقياس الستيني .

الحل

نفرض أن : قياس الزاويتان هما ٣س ، ٥س

∴ ٣س + ٥س = ١٨٠ ⟸ ٨س = ١٨٠ (÷ ٨)

⟸ س = ٢٢,٥°

∴ الزاويتان هما : ٣ × ٢٢,٥ = ٦٧,٥° = ٦٧° ٣٠َ ، ٥ × ٢٢,٥ = ١١٢,٥° = ١١٢° ٣٠َ

النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة :

إذا كان: Δ ٢ ب حـ قائم الزاوية في ب فإن :

حا حـ = المقابل / الوتر = ٢ ب / ٢ حـ

حتا حـ = المجاور / الوتر = ب حـ / ٢ حـ

طا حـ = المقابل / المجاور = ٢ ب / ب حـ

الوتر
المقابل
المجاور
٢ ، ب ، حـ

جيب الزاوية	حا	sin
جيب تمام الزاوية	حتا	cos
ظل الزاوية	طا	tan

مثال ٣ : **في الشكل المقابل :**

Δ أ ب ح قائم الزاوية في ب فيه :

أ ح = ٥ سم

، ب ح = ٤ سم

① **أوجد :**

النسب المثلثية لكل من الزاويتين أ ، ح

② **أوجد قيمة :** جا أ جتا ب + جتا أ جا ح

الحل : ∵ Δ أ ب ح قائم الزاوية في ب

∴ أ ب = $\sqrt{(٥)^٢ - (٤)^٢}$ = ٣ سم

① ∴ جا أ = $\frac{ب ح}{أ ح} = \frac{٤}{٥}$

، جتا أ = $\frac{أ ب}{أ ح} = \frac{٣}{٥}$

، ظا أ = $\frac{ب ح}{أ ب} = \frac{٤}{٣}$

، جا ح = $\frac{أ ب}{أ ح} = \frac{٣}{٥}$

، جتا ح = $\frac{ب ح}{أ ح} = \frac{٤}{٥}$

، ظا ح = $\frac{أ ب}{ب ح} = \frac{٣}{٤}$

② جا أ جتا ح + جتا أ جا ح

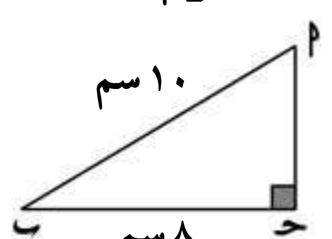
= $\frac{٤}{٥} \times \frac{٤}{٥} + \frac{٣}{٥} \times \frac{٣}{٥}$ = **١**

مثال ٤ : أ ب ح مثلث فيه: ق(∠ح) = ٩٠° ، أ ب = ١٠ سم ، ب ح = ٨ سم

أوجد قيمة : ① ظا ب × ظا أ

② ٤ ظا ب + ٥ جا أ

الحل :



∵ ق(∠ح) = ٩٠°

∴ أ ح = $\sqrt{(١٠)^٢ - (٨)^٢}$ = ٦ سم

① ظا ب × ظا أ = $\frac{٦}{٨} \times \frac{٨}{٦}$ = **١**

② ٤ ظا ب + ٥ جا أ

= ٤ × $\frac{٦}{٨}$ + ٥ × $\frac{٨}{١٠}$ = **٧**

مثال ٥ : **في الشكل المقابل :**

أ ب ح مثلث فيه :

ق(∠أ) = ٩٠°

، أ ح = ١٥ سم

، أ ب = ٢٠ سم

أثبت أن :

جتا ح جتا ب − جا ح جا ب = صفر

الحل : ∵ Δ أ ب ح قائم الزاوية في أ

∴ ب ح = $\sqrt{(٢٠)^٢ + (١٥)^٢}$ = ٢٥ سم

∴ جتا ح جتا ب − جا ح جا ب

= $\frac{١٥}{٢٥} \times \frac{٢٠}{٢٥} - \frac{٢٠}{٢٥} \times \frac{١٥}{٢٥}$ = **صفر**

ملاحظات هامة :

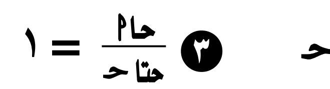
① لأي زاوية حادة س يكون: **ظا س** = $\frac{جا س}{جتا س}$

② لأي زاويتين **حادتين** في مثلث قائم **(متتامتان)** :

في Δ أ ب ح قائم الزاوية في ب يكون: **جا أ = جتا ح** ، **جتا أ = جا ح**

مما سبق يستنتج أن : Δ أ ب حـ قائم الزاوية في ب فإن:

❶ حا أ − حتا حـ = صفر ❷ حا أ + حتا حـ = ٢ حا أ أو ٢ حتا حـ ❸ حا أ / حتا حـ = ١



مثال ٦ : في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث فيه : $\overline{أء} \perp \overline{ب حـ}$ ، أ حـ = ١٧ سم ، ء حـ = ١٥ سم ، أ ب = ١٠ سم

أوجد قيمة : ٣ طا حـ + حتا ب

الحل :

∵ Δ أ ء حـ قائم الزاوية في ء

∴ أ ء = $\sqrt{(17)^2-(15)^2}$ = ٨ سم

∵ Δ أ ء ب قائم الزاوية في ء

∴ ب ء = $\sqrt{(10)^2-(8)^2}$ = ٦ سم

∴ ٣ طا حـ + حتا ب

= ٣ × ٨/١٥ + ٦/١٠ = **١١/٥**

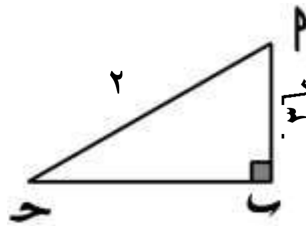
مثال ٧ : في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في ب

فإذا كان : ٢ أ ب = $\sqrt{3}$ أ حـ

أوجد : النسب المثلثية الأساسية للزاوية حـ

الحل :



∵ ٢ أ ب = $\sqrt{3}$ أ حـ

∴ أ ب / أ حـ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

∵ أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في ب

∴ ب حـ = $\sqrt{(2)^2-(\sqrt{3})^2}$ = ١

∴ حا حـ = أ ب / أ حـ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

، حتا حـ = ب حـ / أ حـ = ١/٢

، طا حـ = أ ب / ب حـ = $\sqrt{3}$

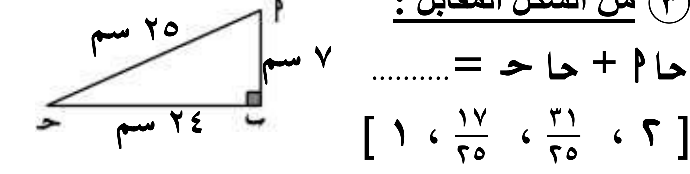
تمارين (١)

١ اختر الإجابة الصحيحة :

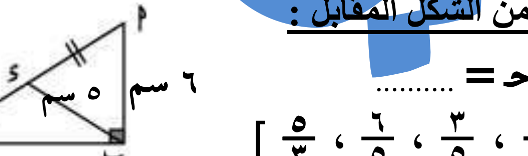
① **من الشكل المقابل :** حتا أ = ... [٤/٥ ، ٣/٥ ، ٤/٣ ، ٣/٤]

② **من الشكل المقابل :** ٥ طا أ = ... [٥ ، ١٣ ، ١٢ ، ٧]

③ **من الشكل المقابل :** حا أ + حا حـ = ... [٢ ، ٣١/٢٥ ، ١٧/٢٥ ، ١]



④ **من الشكل المقابل :** حا حـ = ... [٥/٦ ، ٣/٥ ، ٦/٥ ، ٥/٣]



⑤ إذا كان: Δ س ص ع قائم الزاوية في ص فإن: حا ع = ...

[ص ع/س ع ، س ص/ص ع ، س ص/س ع ، ص ع/س ص]

⑥ إذا كان: Δ ٢ ب حـ قائم الزاوية في حـ فإن: $\frac{\text{ب حـ}}{\text{ٲ حـ}}$ = ...	[حتا حـ ، حتا ٲ ، طا حـ ، طا ٲ]
⑦ ٲ ب حـ مثلث فيه: ق(∠ب) = ٩٠° فإن: حا حـ - حتا ٲ = ...	[٢حا ٲ ، ٢حتا حـ ، ٢حتا ٲ ، صفر]
⑧ ٲ ب حـ مثلث فيه: ق(∠ب) = ٩٠° فإن: حا حـ + حتا ٲ = ...	[٢حا ٲ ، ٢حا حـ ، ٢حتا ب ، ٢حتا حـ]
⑨ إذا كان: Δ ٲ ب حـ قائم الزاوية في ب فإن: حا ٲ + حتا ٲ ١	[= ، < ، > ، ⩾]
⑩ طا ٲ = ...	[حا ٲ حتا ٲ ، $\frac{\text{حا ٲ}}{\text{حتا ٲ}}$ ، $\frac{\text{حتا ٲ}}{\text{حا ٲ}}$ ، $\frac{1}{\text{حتا ٲ}}$]
⑪ طا هـ × حتا هـ = ...	[حا هـ ، حتا هـ ، $\frac{1}{\text{حا ٲ}}$ ، $\frac{1}{\text{حتا ٲ}}$]
⑫ ٲ ب حـ مثلث فيه: ق(∠ب) = ٩٠° ، حا ٲ = $\frac{٤}{٥}$ فإن: حا حـ = ...	[$\frac{٤}{٥}$ ، $\frac{٥}{٤}$ ، $\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{٣}{٤}$]

٢ السؤال ٢ :

① إذا كانت النسبة بين قياسي زاويتين متتامتين كنسبة ٣ : ٥ **أوجد : بالقياس الستيني لكل منهما.**

② إذا كانت النسبة بين قياسات زوايا مثلث كنسبة ٣ : ٤ : ٧ **أوجد : القياس الستيني لكل زاوية.**

③ **في الشكل المقابل :** Δ ٲ ب حـ قائم الزاوية في ب فيه :

ٲ ب = ٧ سم
، ٲ حـ = ٢٥ سم

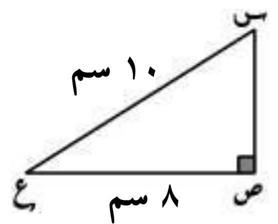
أوجد قيمة : ❶ طا ٲ ❷ حتا ٲ

④ **في الشكل المقابل :** Δ ٲ ب حـ قائم الزاوية في ب فيه :

ٲ ب = ٣ سم
، ب حـ = ٤ سم

أوجد قيمة : طا ٲ طا حـ + حتا ٲ

⑤ **في الشكل المقابل :** س ص ع مثلث فيه:



ق(∠ص) = ٩٠°
، س ع = ١٠ سم
، ص ع = ٨ سم

أوجد قيمة : ❶ حا^2 س + حتا^2 س
❷ حا س + حتا ع

⑥ **في الشكل المقابل :** ٲ ب حـ مثلث فيه:

ق(∠حـ) = ٩٠°
ٲ حـ = ٩ سم
، ب حـ = ١٢ سم

أثبت أن :

حا ٲ حا ب - حتا ٲ حتا ب = صفر

⑦ أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في حـ ، أ ب = ٢٥ سم ، ب حـ = ٢٠ سم

أوجد : النسب المثلثية لكل من الزاويتين أ ، ب

⑧ أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في حـ ، أ ب = ١٣ سم ، ب حـ = ١٢ سم **أوجد :**

❶ ١ + طا^{٢} أ ❷ طا أ × طا ب

⑨ أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في ب ، أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ١٥ سم

❶ **أوجد :** طا أ ❷ **أثبت أن :** حا أ حتا حـ + حتا أ حا حـ = ١

⑩ أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في ب ، أ حـ = ٥ سم ، ب حـ = ٤ سم **أوجد :**

❶ طا أ + حتا أ - حا أ ❷ حا حـ - حتا حـ + طا حـ

⑪ أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في ب ، ب حـ = ٥ سم ، أ حـ = ٥ $\sqrt{٢}$ سم

أوجد : ٢ حا أ حتا أ

⑫ **في الشكل المقابل :** Δ أ ب حـ فيه :

أ ب = ٥ سم

، ق(∠ حـ) = ٣٠°

، أ د ⊥ ب حـ

فإذا كان أ د = ٤ سم

أوجد قيمة : حتا ب + حا حـ

⑬ **في الشكل المقابل :** أ ب حـ مثلث فيه:

أ د ⊥ ب حـ

، أ ب = ١٣ سم

، أ حـ = ١٥ سم

، د حـ = ٩ سم

أوجد قيمة :

$$\frac{\text{طا}(\angle \text{حـ أ د}) + \text{طا}(\angle \text{ب أ د})}{\text{طا}(\angle \text{حـ أ د}) - \text{طا}(\angle \text{ب أ د})}$$

⑭ **في الشكل المقابل :**

أ ب حـ مثلث فيه :

أ د ⊥ ب حـ

، أ ب = أ حـ = ١٠ سم

، ب حـ = ١٢ سم

أثبت أن : ① حا ب + حتا حـ = ١,٤

② حا^{٢} حـ + حتا^{٢} حـ = ١

⑮ **في الشكل المقابل :**

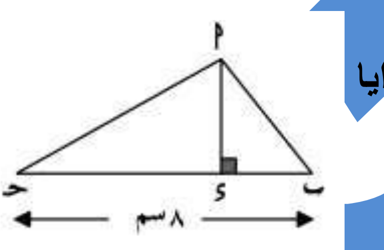
Δ أ ب حـ حاد الزوايا

، أ د ⊥ ب حـ

، ب حـ = ٨ سم

أوجد قيمة :

أ ب حتا ب + أ حـ حتا حـ



٣ **السؤال ٣ :**

① س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص ، فإذا كان س ص : س ع = ١ : ٢ **أوجد :** حا س طا س

② Δ أ ب جـ قائم الزاوية في ب ،وكان حا أ = ٠,٦ **أوجد قيمة** : حا أ حتا جـ + حتا أ حا جـ

③ أ ب جـ مثلث متساوي الساقين فيه: أ ب = أ جـ ، حا $\frac{أ}{٢}$ = $\frac{٤}{٥}$ **أوجد قيمة** : حتا ب

④ **في الشكل المقابل :** Δ أ ب جـ قائم الزاوية في ب حيث :

، أ ب = ٦ سم

، طا جـ = $\frac{٣}{٤}$

أوجد : ❶ طول كل من: $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{أ جـ}$

❷ حا أ + حتا أ



⑤ **في الشكل المقابل :** أ ب جـ مثلث فيه:

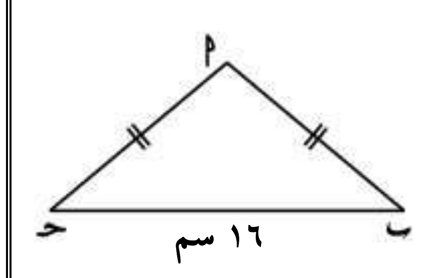
أ ب = أ جـ

، ب جـ = ١٦ سم

، حتا جـ = $\frac{٤}{٥}$

أوجد :

مساحة Δ أ ب جـ



⑥ **في الشكل المقابل :** أ ب جـ د شبه منحرف فيه



: $\overline{أ د}$ // $\overline{ب جـ}$

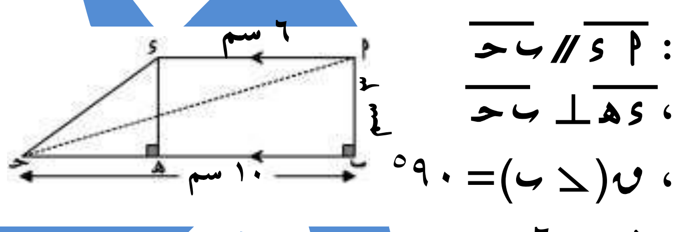
، $\overline{د هـ}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$

، ق(∠ب) = ٩٠°

، أ د = ٦ سم

، أ ب = ٣ سم ، ب جـ = ١٠ سم

أوجد قيمة : حتا (∠د جـ ب) − طا (∠أ جـ ب)



⑦ **في الشكل المقابل :** أ ب جـ د شبه منحرف

قائم الزاوية في أ

، $\overline{أ د}$ // $\overline{ب جـ}$

، ق(∠ب د جـ) = ٩٠°

، أ ب = ٦ سم

، ب د = ١٠ سم

أوجد : ❶ طا (∠أ د ب) ❷ طول: $\overline{د جـ}$



⑧ س ص ع ل شبه منحرف فيه $\overline{س ل}$ // $\overline{ص ع}$ ، ق(∠ص) = ٩٠° ، س ص = ٦ سم

، س ل = ٢ سم ، ص ع = ١٠ سم **أثبت أن** : حتا (∠ل ع ص) − طا (∠س ع ص) = $\frac{١}{٥}$

⑨ أ ب جـ د شبه منحرف متساوي الساقين فيه $\overline{أ د}$ // $\overline{ب جـ}$ ، أ د = ٤ سم

، أ ب = ٥ سم ، ب جـ = ١٢ سم **أثبت أن** : $\frac{٥ طا ب حتا جـ}{حا^{٢} جـ + حتا^{٢} ب} = ٣$

⑩ **في الشكل المقابل :** ق(∠ب أ جـ) = ٩٠°

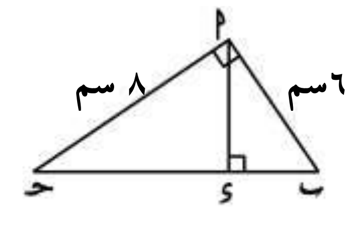
، $\overline{أ د}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$

، أ ب = ٦ سم

، أ جـ = ٨ سم

❶ **أوجد** : طا (∠ب أ د)

❷ **أوجد قيمة** : حتا (∠د أ جـ) + حتا (∠د أ ب)



⑪ **في الشكل المقابل :**

ق(∠أ) = ٩٠°

، $\overline{د هـ}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$

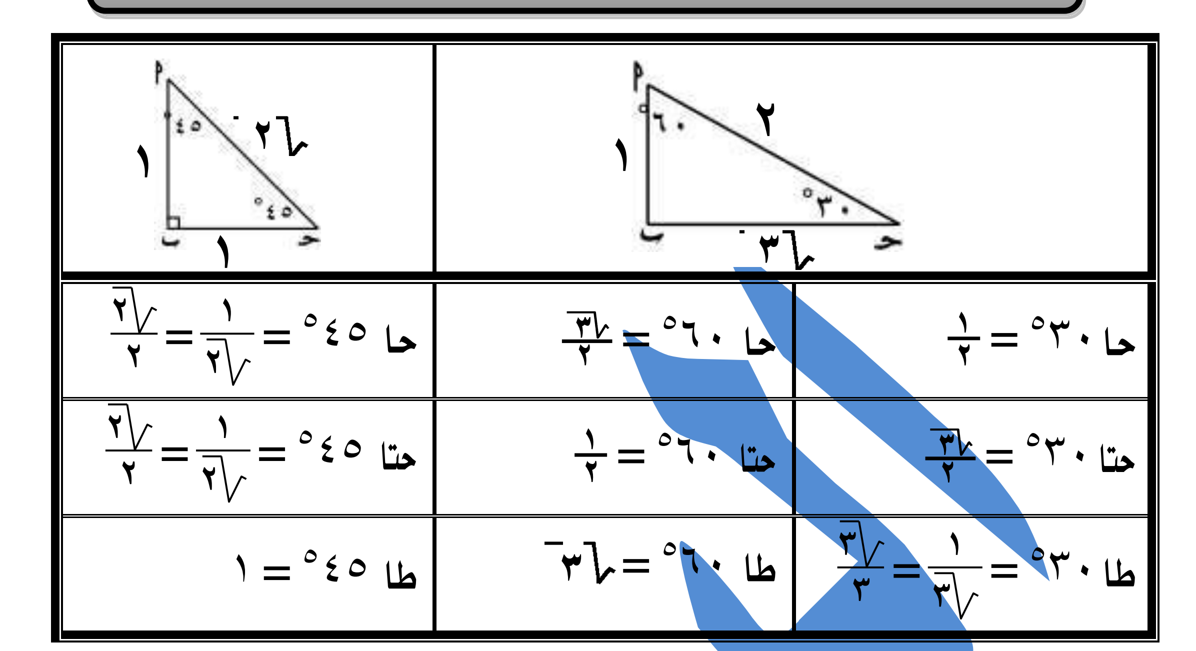
، هـ منتصف $\overline{ب جـ}$

، أ و = ٥ سم

، ب و = ١٣ سم

أوجد : طا (∠ب)

النسب المثلثية الأساسية لبعض الزوايا الخاصة



حا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$	حا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	حا ٤٥° = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$
حتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	حتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$	حتا ٤٥° = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$
طا ٣٠° = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$	طا ٦٠° = $\sqrt{٣}$	طا ٤٥° = ١

ملاحظات هامة : ⇩

❶ **إذا كان** : حا أ = حتا ب **فإن**: ق(∠أ) + ق(∠ب) = ٩٠° (أ ، ب متتامتان)

(مثال) حا ٣٠° = حتا ٦٠° ، حا ٦٠° = حتا ٣٠° ، حا ٤٥° = حتا ٤٥° ، حا ٧٠° = حتا ٢٠°

❷ طا س = $\frac{\text{حا س}}{\text{حتا س}}$ (مثال) طا ٣٠° = $\frac{\text{حا ٣٠°}}{\text{حتا ٣٠°}}$

مثال ١ : بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة ما يأتي :

(١) طا ٤٥° حا ٣٠° (الحل) = ١ × $\frac{١}{٢}$ = $\boxed{\frac{١}{٢}}$	(٢) حا ٦٠° + حتا ٣٠° − طا ٦٠° (الحل) = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ − $\sqrt{٣}$ = صفر
(٣) حتا ٦٠° حا ٣٠° + حا ٦٠° حتا ٣٠° (الحل) = ($\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$) + ($\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$) = $\frac{١}{٤}$ + $\frac{٣}{٤}$ = $\boxed{١}$	(٤) ٢ حا ٤٥° حتا ٤٥° + ٤ حا ٣٠° حتا ٦٠° (الحل) = (٢ × $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ × $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$) + (٤ × $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$) = ١ + ١ = $\boxed{٢}$

تدريب ١ : بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة ما يأتي :

❶ ٤ طا ٤٥° حتا ٦٠° − ٤ حا ٣٠° حتا ٦٠°	❷ حتا^{٢} ٤٥° + طا^{٢} ٦٠° − حا ٣٠°

مثال ٢ : بدون استخدام الآلة الحاسبة أثبت أن :

① حتا ٦٠° = حتا² ٣٠° − حا² ٣٠°

(الحل) ∵ الطرف الأيمن = حتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$

، الطرف الأيسر = حتا² ٣٠° − حا² ٣٠°

= $(\frac{\sqrt{٣}}{٢})^{٢} - (\frac{١}{٢})^{٢}$

= $\frac{٣}{٤} - \frac{١}{٤} = \frac{١}{٢}$

∴ الطرفان متساويان

② حا² ٣٠° = ٥ حتا² ٦٠° − طا² ٤٥°

(الحل) ∵ الطرف الأيمن = حا² ٣٠° = $(\frac{١}{٢})^{٢} = \frac{١}{٤}$

، الطرف الأيسر = ٥ حتا² ٦٠° − طا² ٤٥°

= $٥ \times (\frac{١}{٢})^{٢} - (١)^{٢}$

= $\frac{٥}{٤} - ١ = \frac{١}{٤}$

∴ الطرفان متساويان

تدريب ٢ : بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة ما يأتي :

❶ حا ٣٠° = ٢ حتا² ٣٠° − ١

❷ طا² ٦٠° + ٤ حا ٣٠° = ٥ طا ٤٥°

مثال ٣ : بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة س التي تحقق :

① س حتا ٣٠° = طا ٦٠°

(الحل) س × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = $\sqrt{٣}$ (× $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$)

∴ س = ٢

② س حا ٣٠° حتا² ٤٥° = حا² ٦٠°

(الحل) س × $\frac{١}{٢}$ × $(\frac{\sqrt{٢}}{٢})^{٢} = (\frac{\sqrt{٣}}{٢})^{٢}$

$\frac{١}{٤}$ س = $\frac{٣}{٤}$ (× ٤)

∴ س = ٣

مثال ٤ : في الشكل المقابل :

△ أ ب حـ قائم الزاوية في ب

وكان ق(∠حـ) = ٢ ق(∠أ)

أوجد : ① قياس كل من الزاويتين أ ، حـ

② قيمة : حا أ + حتا حـ ⟸

(الحل)

∵ ق(∠ب) = ٩٠° ، ق(∠حـ) = ٢ ق(∠أ)

∴ ق(∠أ) = ٣٠° ، ق(∠حـ) = ٦٠°

∴ حا أ + حتا حـ = حا ٣٠° + حتا ٦٠°

= $\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} = ١$

مثال ٥ : أوجد باستخدام الالة الحاسبة كلاً من :

① حا ٧٢°
(الحل) sin ٧٢ = ٠,٩٥١

② حتا ٦٥° ٢٣′
(الحل) cos ٦٥ ”” ٢٣ ””
= ٠,٤١٧

③ طا ٧٠° ٤٣′ ١٥″
(الحل) tan ٧٠ ”” ٤٣ ”” ١٥ ””
= ٢,٨٥٩

تمارين (٢)

١ اختر الإجابة الصحيحة :

الأسئلة	اختر
(١) طا ٣٠° حا ٦٠° = ...	[$\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢}$]
(٢) ٢ حتا ٦٠° = ...	[$\frac{١}{٢}$ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، ١ ، $\sqrt{٣}$]
(٣) ٤ حا ٣٠° طا ٦٠° = ...	[٣ ، ٢$\sqrt{٣}$ ، ٦ ، ١٢]
(٤) طا ٣٠° طا ٦٠° طا ٤٥° = ...	[$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $\sqrt{٣}$ ، ١ ، $\frac{١}{٢}$]
(٥) حا ٤٥° + حتا٤٥° = ...	[٢ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٣}$]
(٦) حا ٣٠° + حتا ٦٠° + طا ٤٥° = ...	[−٢ ، ١ ، ١,٥ ، ٢]
(٧) طا² ٤٥° − حتا² ٤٥° = ...	[صفر ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، ١]
(٨) ٢ طا ٤٥° − $\frac{١}{حتا ٦٠°}$ = ...	[صفر ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، ١]
(٩) $\sqrt{٢}$ حا ٣٠° = ...	[حا ٤٥° ، حا ٦٠° ، حتا ٣٠° ، حتا ٦٠°]
(١٠) ٢ حا ٦٠° حتا ٦٠° = ...	[حا ٣٠° ، حا ٦٠° ، حتا ٦٠° ، طا ٦٠°]
(١١) إذا كانت س ، ص زاويتين متتامتين بحيث س:ص = ١ : ٢ فإن: حا س + حتا ص = ...	[$\sqrt{٣}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، ١]
(١٢) المثلث ا ب حـ قائم الزاوية في حـ ومتساوي الساقين فإن: طا ا = ...	[$\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، $\sqrt{٣}$ ، ١ ، $\frac{١}{٢}$]
(١٣) ا ب حـ مثلث قائم الزاوية في ا فيه طا ب = ١ فيكون: طا حـ حا حـ حتا حـ = ...	[١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٢}}$]
(١٤) إذا كان: حا ٣٠° = حتا هـ فإن: ق(∠ هـ) = ...°	[٦٠ ، ٤٥ ، ١٠ ، ٣٠]
(١٥) إذا كان: حا ا = حتا ا فإن: طا ا = ...°	[$\frac{١}{٢}$ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، ١ ، $\sqrt{٣}$]
(١٦) إذا كان: Δ ا ب حـ فيه ق(∠ ا) = ٨٥° ، حا ب = حتا ب فإن: ق(∠ حـ) = ...°	[٣٠ ، ٤٥ ، ٥٠ ، ٦٠]
(١٧) إذا كان: Δ ا ب حـ فيه ق(∠ ا) = ٧٠° ، حا ب = حتا ٣٠° فإن: ق(∠ حـ) = ...°	[٨٠ ، ٧٠ ، ٦٠ ، ٥٠]
(١٨) إذا كان: Δ ا ب حـ فيه ق(∠ ا) : ق(∠ ب) : ق(∠ حـ) = ٣ : ٤ : ٥ فإن: حتا ب = ...	[صفر ، $\frac{١}{٢}$ ، ١ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$]

٢ بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد القيمة العددية لكل مما يأتي :

① حا ٦٠° + حتا ٣٠° − طا ٦٠°	② (حتا ٣٠° − حتا ٦٠°)(حا ٦٠° + حا ٣٠°)
③ حا^2 ٣٠° + حتا^2 ٣٠°	④ طا^2 ٦٠° − ٤ حا^2 ٣٠°
⑤ حا^2 ٦٠° + حتا^2 ٣٠° − طا ٤٥°	⑥ حا ٣٠° حتا ٦٠° + حا^2 ٦٠° + ٢ طا ٤٥°
⑦ حا ٤٥° حتا ٤٥° + حا ٣٠° حتا ٦٠° − حتا^2 ٣٠°	⑧ حا ٦٠° + حتا ٣٠° − طا ٦٠° + حا^2 ٤٥°
⑨ ٣ طا^2 ٣٠° + $\frac{١}{حتا ٦٠°}$	⑩ $\frac{حتا^2 ٦٠° + حتا^2 ٣٠° + طا^2 ٤٥°}{حا ٦٠° طا ٦٠° − حا ٣٠°}$

٣ بدون استخدام الآلة الحاسبة ، أثبت أن :

① ٢ حا ٣٠° حتا ٣٠° = حا ٦٠°	② حتا ٦٠° = ٢ حتا^2 ٣٠° − ١
③ حتا ٦٠° = حتا^2 ٣٠° − حا^2 ٣٠°	④ طا ٦٠° = طا ٦٠° طا^2 ٣٠° + ٢ طا ٣٠°
⑤ حا^2 ٣٠° = ٥ حتا^2 ٦٠° − طا^2 ٤٥°	⑥ ٤ حا ٣٠° = طا^2 ٦٠° − طا^2 ٤٥°
⑦ حا^2 ٦٠° + حتا^2 ٣٠° − طا ٤٥°	⑧ حا ٤٥° حتا ٤٥° + حا ٣٠° حتا ٦٠° = حتا^2 ٣٠°
⑨ حا^3 ٣٠° = ٩ حتا^3 ٦٠° − طا^2 ٤٥°	⑩ ٢ حتا^2 ٣٠° − ١ = ١ − ٢ حا^2 ٣٠°
⑪ حتا ٦٠° + ٢ حا^2 ٤٥° = حا ٣٠° + ٣ طا^2 ٣٠°	⑫ ٩ حا ٣٠° − حتا^2 ٤٥° = طا^2 ٦٠° + طا ٤٥°
⑬ طا^2 ٦٠° − طا^2 ٤٥° = حا^2 ٦٠° + حتا^2 ٦٠° + ٢ حا ٣٠°	
⑭ طا ٦٠° = ٢ طا ٣٠° ÷ (١ − طا^2 ٣٠°)	

٤ أوجد قيمة س التي تحقق :

① ٤س = حتا^2 ٣٠° طا^2 ٣٠° طا^2 ٤٥°	② س حا ٣٠° حتا^2 ٤٥° = حا^2 ٦٠°
③ حا ٦٠° = س حا ٣٠° حتا ٣٠°	④ س طا ٣٠° حا ٣٠° = حا^2 ٤٥° + حتا ٦٠°
⑤ ٢س حا ٣٠° = حا^2 ٤٥° − حتا ٦٠° + طا ٤٥° طا ٦٠°	
⑥ س حا ٤٥° حتا ٤٥° طا ٦٠° = طا^2 ٤٥° − حتا^2 ٦٠°	

إيجاد الزاوية إذا علمت النسبة المثلثية لها

مثال ١ : أوجد قيمة هـ حيث هـ قياس زاوية حادة :

① حا هـ = ٠,٧ (الحل) shift sin ٠,٧ = " ∴ هـ = ٣٧″ ٢٥′ ٤٤°	② حتا هـ = ٠,٧١٥٢ (الحل) shift cos ٠,٧١٥٢ = " ∴ هـ = ٢٥″ ٢٠′ ٤٤°	③ طا هـ = ١,٥١٥٦ (الحل) shift tan ١,٥١٥٦ = " ∴ هـ = ٥٩″ ٣٤′ ٥٦°

مثال ٢ : أكمل ما يأتي :

① إذا كانت : طا(هـ + ١٠) = ١

فإن: ق(∠هـ) = ...°

(الحل) هـ + ١٠ = ٤٥

هـ = ٤٥ − ١٠ ∴ **هـ = ٣٥°**

② إذا كانت : طا ٣س = √٣

فإن: ق(∠س) = ...°

(الحل) ٣س = ٦٠ (÷ ٣)

∴ **س = ٢٠°**

③ إذا كانت : ٢حا س = ١

فإن: ق(∠س) = ...°

(الحل) ∵ ٢حا س = ١ (÷ ٢)

حا س = ١/٢ ∴ **س = ٣٠°**

④ إذا كانت : طا س = ٢ حتا ٦٠°

فإن: ق(∠س) = ...°

(الحل) ∵ طا س = ٢ × ١/٢

طا س = ١ ∴ **س = ٤٥°**

مثال ٣ : أوجد قيمة س (حيث س زاوية حادة) إذا كان :

① حا س = حا ٦٠° حتا ٣٠° − حتا ٦٠° حا ٣٠°

(الحل) حا س = (√٣/٢ × √٣/٢) − (١/٢ × ١/٢)

حا س = ٣/٤ − ١/٤ = ١/٢

∴ **س = ٣٠°**

② ٢ حا س = طا² ٦٠° − ٢ طا ٤٥°

(الحل) ٢ حا س = (√٣)² − ٢ × ١

٢ حا س = ١ (÷ ٢)

حا س = ١/٢ ∴ **س = ٣٠°**

③ ٣ طا س = ٢ حا ٣٠° + ٤ حتا ٦٠°

(الحل) ٣ طا س = ٢ × ١/٢ + ٤ × ١/٢

٣ طا س = ٣ (÷ ٣)

طا س = ١ ∴ **س = ٤٥°**

④ حتا س طا ٦٠° = حا ٦٠°

(الحل) حتا س × √٣ = √٣/٢ (÷ √٣)

حتا س = ١/٢

∴ **س = ٦٠°**

مثال ٤ : أمثلة متنوعة :

① من الشكل المقابل :

أوجد: ق(∠٩)

(الحل)

∵ حا ٩ = $\frac{٤}{٦}$

∴ ق(∠٩) = ٤١° ٤٨′ ٣٧″

② من الشكل المقابل :

أوجد: ق(∠ح)

(الحل)

∵ حتا ح = $\frac{٥}{٧}$

∴ ق(∠ح) = ٤٤° ٢٤′ ٥٥″

③ في الشكل المقابل :

٩بحء مستطيل فيه:

، ٩ب = ٣سم

، ٩ح = ٥سم

أوجد : ① ق(∠٩حب)

② مساحة سطح المستطيل ٩بحء

(الحل)

∵ حا(∠٩حب) = $\frac{٣}{٥}$

∴ ق(∠٩) = ٣٦° ٥٢′ ١٢″

∵ △ ٩بح قائم الزاوية في ب

∴ بح = $\sqrt{(٥)^٢ - (٣)^٢}$ = ٤ سم

∴ مساحة □ ٩بحء = ٣ × ٤ = ١٢ سم^٢

④ ٩بح مثلث متساوي الساقين فيه :

٩ب = ٩ح = ٨سم ، بح = ١٢سم

أوجد : ① ق(∠ب)

② مساحة △ ٩بح لأقرب رقمين عشريين

(الحل) نرسم ٩ء ⊥ بح

∵ ٩ء ⊥ بح

، ٩ب = ٩ح

∴ بء = ءح = ٦ سم

∵ في △ ٩بح : حتا ب = $\frac{٦}{٨}$

∴ ق(∠ب) = ٤١° ٢٤′ ٣٥″

∵ △ ٩بء قائم الزاوية في ء

∴ ٩ء = $\sqrt{(٨)^٢ - (٦)^٢}$ = ٢$\sqrt{٧}$ سم

∴ مساحة △ ٩بح = $\frac{١}{٢}$ × ١٢ × ٢$\sqrt{٧}$

≃ ٣١,٧٥ سم^٢

⑤ من الشكل المقابل :

أوجد طول كل من:

٩ب ، بح

لأقرب رقم عشري واحد

(الحل) ∵ حا ٤٠° = $\frac{٩ب}{١٢}$

∴ ٩ب = ١٢ حا ٤٠° = ٧,٧ سم

∵ حتا ٤٠° = $\frac{بح}{١٢}$

∴ بح = ١٢ حتا ٤٠° = ٩,١ سم

⑥ من الشكل المقابل :



أوجد طول كل من:

٩ب ، بح

لأقرب رقم عشري واحد

(الحل) ∵

∴ ٩ب =

∵

∴ بح =

تمارين (٣)

١ اختر الإجابة الصحيحة :

الأسئلة	اختر
(١) إذا كانت: حتا س = ٠,٥ فإن: ق(∠س) = ...°	[٩٠ ، ٦٠ ، ٤٥ ، ٣٠]
(٢) إذا كانت: حا س = ٠,٨ فإن: ق(∠س) ≃ ....°	[٥٣ ، ٣٧ ، ٣٩ ، ٨٣]
(٣) حا س = ٢ حا ٣٠° حتا ٣٠° فإن: ق(∠س) = ...°	[١٥ ، ٣٠ ، ٤٥ ، ٦٠]
(٤) إذا كانت: حا(س + ٧) = $\frac{١}{٢}$ فإن: ق(∠س) = ...°	[٢٣ ، ٣٠ ، ٥٣ ، ٧]
(٥) إذا كانت: حا ٢س = $\frac{١}{٢}$ فإن: ق(∠س) = ...°	[١٥ ، ٣٠ ، ٤٥ ، ٦٠]
(٦) إذا كانت: حتا ٣س = $\frac{١}{٢}$ فإن: ق(∠س) = ...°	[١٥ ، ٢٠ ، ٤٥ ، ٦٠]
(٧) إذا كانت: حتا $\frac{س}{٢}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ فإن: ق(∠س) = ...°	[١٥ ، ٣٠ ، ٤٥ ، ٦٠]
(٨) إذا كانت: طا(٢س − ٥) = ١ فإن: ق(∠س) = ...°	[٤٥ ، ٣٥ ، ٢٥ ، ١٥]
(٩) إذا كانت: ٢ حا س = طا ٦٠° فإن: ق(∠س) = ...°	[١٥ ، ٣٠ ، ٤٥ ، ٦٠]
(١٠) إذا كانت: $\sqrt{٢}$ حتا ٣ س = ١ فإن: ق(∠س) = ...°	[١٥ ، ٣٠ ، ٤٥ ، ٦٠]
(١١) إذا كانت: طا س = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ فإن: طا ٢س = ...	[$\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ ، ٢$\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٣}$ ، ٣]
(١٢) إذا كانت: حتا $\frac{س}{٢}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ فإن: حا س = ...	[$\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$]
(١٣) إذا كانت: حا $\frac{س}{٢}$ = حتا ٦٠° فإن: طا س = ...	[$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، ١ ، $\sqrt{٣}$ ، $\frac{١}{٢}$]
(١٤) إذا كانت: حا(س + ٥) = $\frac{١}{٢}$ فإن: طا(س + ٢٠) = ...	[$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، ١]

٢ بدون استخدام الآلة الحاسبة ، أوجد قيمة س حيث س قياس زاوية حادة في كل مما يأتي :

(١) حتا(٣س + ٦)° = حا ٣٠°	(٢) حا س = طا ٣٠° حا ٦٠°
(٣) طا س = ٤ حتا ٦٠° حا ٣٠°	(٤) طا س = ٤ حتا ٣٠° − طا ٦٠°
(٥) حا س = ٢ حا ٦٠° حتا ٣٠° − طا ٤٥°	(٦) حتا س = طا ٤٥° حتا^{٢} ٣٠° − حا^{٢} ٣٠°
(٧) ٢ حا س = ٤ حتا ٦٠° − طا ٤٥°	(٨) ٢ طا س = طا^{٢} ٦٠° − ٢ حا ٣٠°
(٩) ٢ حتا س = ٤ حا^{٢} ٦٠° − ٣ طا ٤٥°	(١٠) ٢ حا س = طا^{٢} ٦٠° − ٤ حا^{٢} ٤٥°
(١١) ٤ حا س = طا^{٢} ٦٠° − طا^{٢} ٤٥°	(١٢) ٣ طا^{٢} س = ٤ حا^{٢} ٣٠° + ٨ حتا^{٢} ٦٠°

⑬ حاس طا ٦٠° = حتا ٣٠°	⑭ حا٢ ٤٥° = حتاس طا ٣٠°
⑮ طاس = $\frac{\text{طا ٣٠°}}{\text{١ − طا}^{٢}\text{ ٣٠°}}$	⑯ طاس = $\frac{\text{٢ طا ٣٠°}}{\text{١ − طا}^{٢}\text{ ٣٠°}}$
⑰ حتاس = $\frac{\text{حا ٦٠° حا ٣٠°}}{\text{حا}^{٢}\text{ ٤٥°}}$	⑱ حتاس = $\frac{\text{حا}^{٢}\text{ ٦٠° − حا ٣٠°}}{\text{٣ حتا}^{٢}\text{ ٤٥° − ١}}$
⑲ حاس حا٢ ٦٠° = ٣ حا٢ ٤٥° حتا٢ ٤٥° حتا ٦٠°	
⑳ حاس حا ٤٥° حتا ٤٥° طا ٦٠° = طا٢ ٤٥° − حتا٢ ٦٠°	

٣ تمارين متنوعة :

① **إذا كانت:** حاس = طا ٣٠° حا ٦٠° حيث س قياس زاوية حادة **أوجد قيمة** : ٤ حتاس طا٢س

② **إذا كانت:** حاس = حتاس حيث س قياس زاوية حادة **أوجد** :

(١) ق(∠س) **(٢) قيمة**: طاس − ٢ حتا ٦٠° + حتا٢ س

③ **إذا كانت:** طا $\frac{\text{٣س}}{\text{٢}}$ = ١ حيث س قياس زاوية حادة **أوجد قيمة** : حا٢ س + حتا٢ س

④ **إذا كانت:** طاس = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ حيث س زاوية حادة **أوجد قيمة** : حاس طا ($\frac{\text{٣س}}{\text{٢}}$) + حتا٢س

⑤ **إذا كانت:** ٢ حتا (س + ١٥°) = $\sqrt{٢}$ حيث س قياس زاوية حادة

أوجد قيمة : طا٢س − حا٢س

٤ مسائل الرسم :

① **في الشكل المقابل :** △ أ ب حـ قائم الزاوية في ب فيه :

ب حـ = ٦ سم

، أ حـ = ٨ سم

أوجد قيمة : ❶ ق(∠ حـ)

❷ مساحة △ أ ب حـ لأقرب رقم عشرين

② **في الشكل المقابل :** أ ب حـ ء مستطيل فيه :

، أ ب = ١٥ سم

، أ حـ = ٢٥ سم

أوجد : ❶ ق(∠ أ حـ ب)

❷ مساحة سطح المستطيل أ ب حـ ء

③ **في الشكل المقابل :** Δ أ ب جـ فيه :

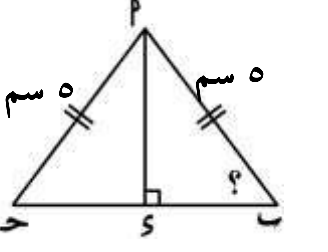
أ ء ⊥ ب جـ

، أ ب = أ جـ = ٥ سم

، ب جـ = ٦ سم

أوجد : ❶ ق(∠ب)

❷ مساحة Δ أ ب جـ لأقرب رقم عشري واحد



④ **في الشكل المقابل :** أ ب جـ ء شبه منحرف فيه:

أ ء // ب جـ

، ب أ ⊥ أ ء

، أ ب = ٣ سم

، ب جـ = ٩ سم

أوجد : ق(∠ أ ء جـ)

⑤ **في الشكل المقابل :** أ ب جـ ء شبه منحرف قائم الزاوية عند جـ

، أ ء // ب جـ

، أ ب = ٥ سم

، ب جـ = ٧ سم ، أ ء = ٤ سم

أوجد : ❶ ق(∠ب)

❷ مساحة شبه منحرف أ ب جـ ء

⑥ **في الشكل المقابل :**

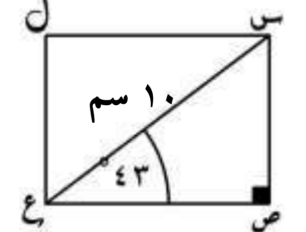
س ص ع ل مستطيل

، س ع = ١٠ سم

، ق(∠ س ع ص) = ٤٣°

أوجد :

محيط Δ س ص ع لأقرب جزء من عشرة



⑦ **في الشكل المقابل :** Δ أ ب جـ فيه :

أ ء ⊥ ب جـ

، أ جـ = ٦ سم

، ب جـ = ١٠ سم

، ق(∠جـ) = ٥٢°

أوجد : ❶ طول أ ء لأقرب رقم عشري واحد

❷ مساحة Δ أ ب جـ

⑧ **في الشكل المقابل :** أ ب جـ ء متوازي أضلاع

مساحته ٣٦√٣ سم²

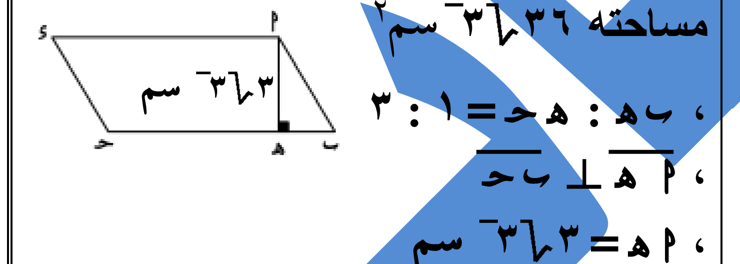
، ب هـ : هـ جـ = ١ : ٣

، أ هـ ⊥ ب جـ

، أ هـ = ٣√٣ سم

أوجد : ❶ طول ب جـ

❷ ق(∠ب)



⑨ **في الشكل المقابل :**

أ ب جـ ء شبه منحرف متساوي الساقين فيه :

أ ب = أ ء = ء جـ = ٥ سم ، ب جـ = ١١ سم

أوجد : ❶ ق(∠ب) ، ق(∠ب أ ء)

❷ مساحة شبه المنحرف أ ب جـ ء

⑩ بسبب الريح كسر الجزء العلوي لشجرة فصنع مع الأرض زاوية قياسها ٦٠° فإذا كانت نقطة تلاقي قمة الشجرة بالأرض تبعد عن قاعدة الشجرة ٤ أمتار

أوجد طول الشجرة لأقرب متر .

البعد بين نقطتين

البعد بين نقطتين :

قاعدة هامة :

$ا ب = \sqrt{(س_١ - س_٢)^٢ + (ص_١ - ص_٢)^٢}$

ا $(س_١ ، ص_١)$ ——— ب $(س_٢ ، ص_٢)$

أي أن : البعد بين النقطتين = $\sqrt{\text{مربع فرق السينات + مربع فرق الصادات}}$

مثال ١ : أوجد $\overline{اب}$ في الحالات الآتية :

① ا (٤ ، ٦) ، ب (٧ ، ٢) (الحل) $ا ب = \sqrt{(٤ - ٧)^٢ + (٦ - ٢)^٢} = ٥$ وحدة طول	② ا (٦ ، ٠) ، ب (٠ ، −٨) (الحل) $ا ب = \sqrt{(٦ - ٠)^٢ + (٠ + ٨)^٢} = ١٠$ وحدة طول
③ ا (٦ ، ٧) ، ب (١ ، −٥) (الحل) $ا ب = \sqrt{(٦ - ١)^٢ + (٧ + ٥)^٢} = ١٣$ وحدة طول	④ ا (−٢ ، ٥) ، ب (٣ ، ٠) (الحل) $ا ب = \sqrt{(-٢ - ٣)^٢ + (٥ - ٠)^٢} = ٥\sqrt{٢}$ وحدة طول

نتائج هامة :

نتيجة ١ :

(١) بعد النقطة م(س ، ص) عن نقطة الأصل و(٠ ، ٠) هو و م = $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$

(٢) بعد النقطة م(س ، ص) عن محور السينات هو |ص|

(٣) بعد النقطة م(س ، ص) عن محور الصادات هو |س|

مثال ٢ : أكمل ما يأتي :

① البعد بين النقطة (٤ ، −٣) ونقطة الأصل = ... وحدة طول (الحل) = $\sqrt{(٤)^٢ + (-٣)^٢} = ٥$ وحدة طول
② بعد النقطة (٢ ، −٣) عن محور السينات = ٣ وحدة طول
③ بعد النقطة (−٥ ، −٢) عن محور الصادات = ٥ وحدة طول

نتيجة ٢ : لإثبات أن أي ثلاث نقط على استقامة واحدة :

نوجد البعد بين كل نقطتين ثم نثبت أن **أكبر بعد = مجموع البعدين الآخرين.**

مثال ٣ : **أثبت أن** : أ(٤ ، ٣) ، ب(١ ، ١) ، حـ(– ٥ ، – ٣) **تقع على استقامة واحدة .**

الحـــل

∵ أ ب = $\sqrt{(٤ - ١)^٢ + (٣ - ١)^٢} = \sqrt{١٣}$ وحدة طول

، ب حـ = $\sqrt{(١ + ٥)^٢ + (١ + ٣)^٢} = ٢\sqrt{١٣}$ وحدة طول

، أ حـ = $\sqrt{(٤ + ٥)^٢ + (٣ + ٣)^٢} = ٣\sqrt{١٣}$ وحدة طول

∴ أ حـ = أ ب + ب حـ ∴ أ ، ب ، حـ **تقع على استقامة واحدة**

****

نتيجة ٣ : تعيين نوع المثلث حسب أطوال أضلاعه : في Δ أ ب حـ إذا كان :

(١) أ حـ = أ ب = ب حـ (جميع الأضلاع متساوي في الطول) **فإن** : **المثلث متساوي الأضلاع**

(٢) أ حـ = أ ب (أي **ضلعين فقط** متساويين في الطول) **فإن** : **المثلث متساوي الساقين**

(٣) أ حـ ≠ أ ب ≠ ب حـ **فإن** : **المثلث مختلف الأضلاع**

❁ محيط المثلث = مجموع أطوال أضلاعه

مثال ٤ : **بين نوع المثلث الذي رؤوسه** : أ(– ٢ ، ٣) ، ب(١ ، – ١) ، حـ(١ ، ٧)
بالنسبة لأطوال أضلاعه ، ثم أوجد محيطه .

الحـــل

∵ أ ب = $\sqrt{(- ٢ - ١)^٢ + (٣ + ١)^٢}$ = ٥ وحدة طول

، ب حـ = $\sqrt{(١ - ١)^٢ + (- ١ - ٧)^٢}$ = ٨ وحدة طول

، أ حـ = $\sqrt{(- ٢ - ١)^٢ + (٣ - ٧)^٢}$ = ٥ وحدة طول

∵ أ ب = أ حـ ∴ Δ أ ب حـ متساوي الساقين

∴ **محيط** Δ أ ب حـ = ٥ + ٨ + ٥ = ١٨ **وحدة طول**

نتيجة [٤ : تعيين نوع المثلث حسب زواياه : حيث أ حـ يمثل أكبر أضلاع △ أ ب حـ إذا كان :

① $(أحـ)^2 = (أب)^2 + (ب حـ)^2$ فإن : **المثلث قائم الزاوية في ب**

② $(أحـ)^2 > (أب)^2 + (ب حـ)^2$ فإن : **المثلث منفرج الزاوية في ب**

③ $(أحـ)^2 < (أب)^2 + (ب حـ)^2$ فإن : **المثلث حاد الزوايا**

❋ **مساحة المثلث** = $\frac{1}{2}$ × طول القاعدة × الارتفاع

مثال ٥ : **أثبت أن المثلث الذي رؤوسه :** أ(١ ، ٤) ، ب(–١ ، –٢) ، حـ(٢ ، –٣) **قائم الزاوية في** ب ، **وأوجد مساحة سطحه .**

الحـــل

∵ أب = $\sqrt{(1+1)^2 + (4+2)^2}$ = ٢ $\sqrt{10}$ وحدة طول ⇐ $(أب)^2$ = ٤٠

، ب حـ = $\sqrt{(-1-2)^2 + (-2+3)^2}$ = $\sqrt{10}$ وحدة طول ⇐ $(ب حـ)^2$ = ١٠

، أ حـ = $\sqrt{(1-2)^2 + (4+3)^2}$ = ٥ $\sqrt{2}$ وحدة طول ⇐ $(أحـ)^2$ = ٥٠

∴ $(أحـ)^2 = (أب)^2 + (ب حـ)^2$ ∴ △ أ ب حـ قائم الزاوية في ب

∴ مساحة △ أ ب حـ = $\frac{1}{2}$ × ٢ $\sqrt{10}$ × $\sqrt{10}$ = ١٠ وحدة مربعة

****

نتيجة [٥ : لإثبات أن النقط : أ ، ب ، حـ ، .... تقع على دائرة واحدة مركزها م

نثبت أن : م أ = م ب = م حـ = نق

❋ **محيط الدائرة** = ٢ π نق ❋ **مساحة الدائرة** = π $نق^2$

مثال ٦ : **أثبت أن النقط :** أ(٣ ، –١) ، ب(–٤ ، ٦) ، حـ(٢ ، –٢) **تقع على دائرة مركزها** م(–١ ، ٢) ، **ثم أوجد محيط الدائرة** (π = ٣,١٤)

الحـــل

∵ م أ = $\sqrt{(3+1)^2 + (-1-2)^2}$ = ٥ وحدة طول

، م ب = $\sqrt{(-4+1)^2 + (6-2)^2}$ = ٥ وحدة طول

، م حـ = $\sqrt{(2+1)^2 + (-2-2)^2}$ = ٥ وحدة طول

∴ م أ = م ب = م حـ = نق ∴ النقط أ ، ب ، حـ تقع على دائرة واحدة

∴ محيط الدائرة = ٢ π نق = ٢ × ٣,١٤ × ٥ = ٣١,٤ وحدة طول

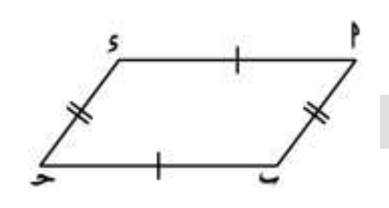
نتيجة ٦ : لإثبات أن الشكل الرباعي ٲ ب حـ ء :

الشكل	الإثبات	المساحة
❶ متوازي أضلاع	(كل ضلعين متقابلين متساويان في الطول) ٲ ب = حـ ء ، ب حـ = ٲ ء	طول القاعدة × الارتفاع
❷ مستطيل	(كل ضلعين متقابلين متساويان في الطول ، القطران متساويان في الطول) ٲ ب = حـ ء ، ب حـ = ٲ ء ، ٲ حـ = ب ء	الطول × العرض
❸ معين	(الأضلاع الأربعة متساوية في الطول) ٲ ب = ب حـ = حـ ء = ٲ ء	نصف حاصل ضرب القطرين $\frac{1}{2}$ × ٲ حـ × ب ء
❹ مربع	(الأضلاع الأربعة متساوية في الطول ، القطران متساويان في الطول) ٲ ب = ب حـ = حـ ء = ٲ ء ، ٲ حـ = ب ء	طول الضلع × نفسه أو نصف مربع طول قطره

مثال ٧ : **أثبت أن النقط** : ٲ(٣ ، −٢) ، ب(−٥ ، ٠) ، حـ(٠ ، −٧) ، ء(٨ ، −٩)
هي رؤوس متوازي أضلاع .



الحــل



∵ ٲ ب = $\sqrt{(٣+٥)^٢ + (−٢−٠)^٢}$ = ٢ $\sqrt{١٧}$ وحدة طول

، ب حـ = $\sqrt{(−٥−٠)^٢ + (٠+٧)^٢}$ = $\sqrt{٧٤}$ وحدة طول

، حـ ء = $\sqrt{(٠−٨)^٢ + (−٧+٩)^٢}$ = ٢ $\sqrt{١٧}$ وحدة طول

، ٲ ء = $\sqrt{(٣−٨)^٢ + (−٢+٩)^٢}$ = $\sqrt{٧٤}$ وحدة طول

∵ ٲ ب = حـ ء ، ب حـ = ٲ ء ∴ الشكل ٲ ب حـ ء متوازي أضلاع

مثال ٨ : **أثبت أن النقط** : ٲ(١ ، ١) ، ب(١ ، ٤) ، حـ(٥ ، ٤) ، ء(٥ ، ١)
هي رؤوس مستطيل ، ثم احسب مساحته .

الحــل

∵ ٲ ب = $\sqrt{(١−١)^٢ + (١−٤)^٢}$ = ٣ وحدة طول

، ب حـ = $\sqrt{(١−٥)^٢ + (٤−٤)^٢}$ = ٤ وحدة طول

، حـ ء = $\sqrt{(٥−٥)^٢ + (٤−١)^٢}$ = ٣ وحدة طول

، ٲ ء = $\sqrt{(١−٥)^٢ + (١−١)^٢}$ = ٤ وحدة طول

، أ حـ = $\sqrt{(١ - ٥)^٢ + (١ - ٤)^٢}$ = ٥ وحدة طول

، ب ء = $\sqrt{(١ - ٥)^٢ + (٤ - ١)^٢}$ = ٥ وحدة طول

∴ أ ب = حـ ء ، ب حـ = أ ء ، أ حـ = ب ء ∴ الشكل أ ب حـ ء مستطيل

∴ مساحة المستطيل = ٤ × ٣ = ١٢ وحدة مربعة

مثال ٩ : إذا كان أ ب حـ ء معين رؤوسه : أ(٣ ، ٢) ، ب(٤ ، −٣) ، حـ(−١ ، −٢) ، ء(−٢ ، ٣) أوجد مساحة سطحه

الحـــل

∵ أ حـ = $\sqrt{(٣ + ١)^٢ + (٢ + ٢)^٢}$ = ٤ $\sqrt{٢}$ وحدة طول

، ب ء = $\sqrt{(٤ + ٢)^٢ + (-٣ - ٣)^٢}$ = ٦ $\sqrt{٢}$ وحدة طول

∴ مساحة المعين = نصف حاصل ضرب القطرين

= $\frac{١}{٢}$ × ٤ $\sqrt{٢}$ × ٦ $\sqrt{٢}$ = ٢٤ وحدة مربعة

مثال ١٠ : إذا كان : أ(س ، ٣) ، ب(٣ ، ٢) ، حـ(٥ ، ١) ، وكان أ ب = ب حـ أوجد قيمة س

الحـــل

∵ أ ب = ب حـ

∴ $\sqrt{(س - ٣)^٢ + (٣ - ٢)^٢}$ = $\sqrt{(٣ - ٥)^٢ + (٢ - ١)^٢}$

$\sqrt{(س - ٣)^٢ + ١}$ = $\sqrt{٥}$ بتربيع الطرفين

(س − ٣)^٢ + ١ = ٥

(س − ٣)^٢ = ٤ بأخذ الجذر

س − ٣ = ٢ | س − ٣ = −٢

س = ٢ + ٣ | س = −٢ + ٣

س = ٥ | س = ١

تمارين (٤)

١ أكمل ما يأتي :

① البعد بين النقطتين (٣ ، -١) ، (-١ ، ٢) = ... وحدة طول
② البعد بين النقطتين (-١ ، ٤) ، (٥ ، ١٢) = ... وحدة طول
③ طول القطعة المستقيمة المرسومة بين النقطتين (٠ ، ٠) ، (٢ ، ٣) = ... وحدة طول
④ **إذا كان:** ا(٢ ، -٥) ، ب(٥ ، -١) **فإن:** ا ب = ... وحدة طول
⑤ البعد بين النقطة (٦ ، -٨) ونقطة الأصل = ... وحدة طول
⑥ بعد النقطة (٤ ، -٣) عن محور السينات = ... وحدة طول
⑦ بعد النقطة (-٤ ، -٣) عن محور الصادات = ... وحدة طول
⑧ البعد العمودي بين المستقيمين ص - ٣ = ٠ ، ص + ٢ = ٠ يساوي .... وحدة طول
⑨ طول نصف قطر الدائرة التي مركزها (٧ ، ٤) وتمر بالنقطة (٣ ، ١) = ... وحدة طول
⑩ **إذا كان:** ا ب **قطر في الدائرة م** حيث ا(٢ ، ٣) ، ب(٦ ، ٦) **فإن:** مساحة سطح الدائرة **م** = ... π ، محيطها = ... π
⑪ **إذا كان:** ا ب جـ ء **مربع** وكان ا(٣ ، ٥) ، ب(٤ ، ٢) **فإن:** مساحة المربع ا ب جـ ء = ... ، محيطه = ...
⑫ **إذا كان:** ا ب جـ ء **معين** وكان ا(٢ ، -٥) ، ب(-١ ، -١) **فإن:** محيط المعين ا ب جـ ء = ...

٢ اختر الإجابة الصحيحة :

الأسئلة	اختر
① دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٢ وحدة طول ، فأي من النقط الآتية تنتمي للدائرة ؟	[(١ ، ٢) ، (-٢ ، ١) ، (√٣ ، ١) ، (√٢ ، ١)]
② دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٣ وحدات ، فإن النقطة .... تنتمي للدائرة ؟	[(١ ، ٢) ، (-٢ ، √٥) ، (√٣ ، ١) ، (√٢ ، ١)]
③ النقط (-٣ ، ٠) ، (٠ ، ٣) ، (٣ ، ٠) هي رؤوس مثلث هي	[مختلف الأضلاع ، متساوي الأضلاع ، منفرج الزاوية ، قائم الزاوية ومتساوي الساقين]

④ **إذا كان** ٵ ب حـ مثلث رؤوسه **:** ٵ(–٣ ، ١) ، ب(–١ ، ١) ، حـ(–٣ ، ٣) **فإن: ق(∠ حـ) =** ....°	[٣٠ ، ٤٥ ، ٦٠ ، ٩٠]
⑤ **إذا كانت** المسافة بين النقطتين (ٵ ، ٠) ، (٠ ، ١) تساوي وحدة طول **فإن:** ٵ = ...	[–١ ، صفر ، ١ ، ±١]

٢ **تمارين متنوعة :**

① **إذا كان** : ٵ(٣ ، ١) ، ب(١ ، ٢) ، حـ(٥ ، ٤) **أثبت أن** : ب حـ = ٢ ٵ ب

② **أثبت أن النقط** : ٵ(١ ، ١) ، ب(٢ ، ٣) ، حـ(٠ ، –١) **تقع على استقامة واحدة .**

③ **أثبت أن النقط** : ٵ(–٢ ، ١) ، ب(٢ ، ٣) ، حـ(٤ ، ٤) **تقع على استقامة واحدة .**

④ **بين نوع المثلث الذي رؤوسه** : ٵ(٣ ، ١) ، ب(–١ ، ٤) ، حـ(–٥ ، ١) **بالنسبة لأطوال أضلاعه ثم أوجد محيطه .**

⑤ **بين نوع المثلث الذي رؤوسه** : ٵ(–٢ ، ٤) ، ب(٣ ، –١) ، حـ(٤ ، ٥) **من حيث أضلاعه .**

⑥ **أثبت أن المثلث** : ٵ(١ ، –٢) ، ب(–٤ ، ٢) ، حـ(١ ، ٦) **متساوي الساقين .**

⑦ **أثبت أن المثلث** : ٵ(–٣ ، ٠) ، ب(٣ ، ٤) ، حـ(١ ، –٦) **متساوي الساقين .**

⑧ **أثبت أن المثلث** : ٵ(–١ ، ٤) ، ب(٣ ، ١) ، حـ(–٥ ، ١) **متساوي الساقين ثم أوجد محيطه.**

⑨ **أثبت أن المثلث** : ٵ(٥ ، ١) ، ب(٢ ، ٥) ، حـ(–١ ، ١) **متساوي الساقين ثم أوجد محيطه.**

⑩ **أثبت أن المثلث** : ٵ(٤ ، ٣) ، ب(٧ ، ٠) ، حـ(١ ، –٢) **مختلف الأضلاع.**

⑪ **بين نوع المثلث الذي رؤوسه** : ٵ(٦ ، ٠) ، ب(٢ ، –٤) ، حـ(–٤ ، ٢) **بالنسبة لزواياه**

⑫ **أثبت أن المثلث الذي رؤوسه** : ٵ(٣ ، ٢) ، ب(–٤ ، ١) ، حـ(٢ ، –١) **قائم الزاوية في حـ ، وأوجد مساحة سطحه .**

⑬ **أثبت أن المثلث الذي رؤوسه** : ٵ(٥ ، –٥) ، ب(–١ ، ٧) ، حـ(١٥ ، ١٥) **قائم الزاوية في ب ، وأوجد مساحة سطحه .**

⑭ **أثبت أن المثلث الذي رؤوسه النقط** : ٵ(٣ ، ٤) ، ب(٥ ، ١) ، حـ(٠ ، ٢) **قائم الزاوية في ٵ ، ومتساوي الساقين .**

⑮ **إذا كانت النقطة** ٫ (١ ، - ٢) **تقع على دائرة مركزها** م(٥ ، ١) **أوجد طول قطرها**

⑯ **أثبت أن النقط** : ٫ (٣ ، ١) ، ب(٢ ، - ٢) ، حـ(٢ ، ٤) **تقع على دائرة مركزها** م(- ٢ ، ١) ، **ثم أوجد محيط الدائرة** (حيث π = ٣,١٤)

⑰ **أثبت أن النقط** : ٫ (- ٦ ، ٢) ، ب(٠ ، ٨) ، حـ(- ٨ ، ٤) **تقع على دائرة التي مركزها** م(- ٤ ، ٦) ، **ثم أوجد محيط الدائرة** (حيث π = ٣,١٤)

---

⑱ **أثبت أن** : ٫ (- ١ ، ١) ، ب(٠ ، ٥) ، حـ(٤ ، ٢) ، ء(٣ ، - ٢) **هي رؤوس متوازي أضلاع** .

⑲ **أثبت أن** : ٫ (- ٢ ، ٥) ، ب(٣ ، ٣) ، حـ(- ٤ ، ٢) ، ء(- ٩ ، ٤) **هي رؤوس متوازي أضلاع** .

⑳ **أثبت أن** : ٫ (١ ، ٠) ، ب(- ١ ، ٤) ، حـ(٧ ، ٨) ، ء(٩ ، ٤) **هي رؤوس مستطيل** .

㉑ **أثبت أن** : ٫ (٥ ، ١) ، ب(١ ، - ٣) ، حـ(- ٥ ، ٣) ، ء(- ١ ، ٧) **هي رؤوس مستطيل** . **ثم احسب مساحته** .

㉒ **أثبت أن النقط** : ٫ (٥ ، ٣) ، ب(٦ ، - ٢) ، حـ(١ ، - ١) ، ء(٠ ، ٤) **هي رؤوس معين ثم احسب مساحته** .

㉓ **أثبت أن النقط** : ٫ (٢ ، ٤) ، ب(- ٣ ، ٠) ، حـ(- ٧ ، ٥) ، ء(- ٢ ، ٩) **هي رؤوس مربع ثم احسب مساحته** .

㉔ **مثل بيانيًا** في مستوي إحداثي متعامد النقط: ٫ (٢ ، ٣) ، ب(- ١ ، - ١) ، حـ(٣، - ٤) ، ء(٦ ، ٠) **ثم أثبت أن أنها رءوس مربع وأوجد مساحة سطحه**.

㉕ إذا كان البعد بين النقطتين : (٫ ، ٧) ، ب(- ٢ ، ٣) يساوي ٥ **أوجد قيمة** ٫

㉖ إذا كان البعد بين النقطتين : (٫ ، ٧) ، (٢٫ ، - ٥) يساوي ١٣ **أوجد قيمة** ٫

㉗ إذا كانت : ٫ (٢ ، س) ، ب(٣ ، - ١) وكانت ٫ ب = $\sqrt{١٧}$ **أوجد قيمة** س

㉘ إذا كان : بعد النقطة (س ، ٥) عن النقطة (٦ ، ١) يساوي ٢$\sqrt{٥}$ **أوجد قيمة** س

㉙ إذا كانت : حـ(٣ ، - ٢) ، ء(٫ ، ٣) ،وكان حـ ء= ٥$\sqrt{٢}$ **أوجد قيمة** ٫

㉚ إذا كان البعد بين النقطتين : (٫ ، ٢) ، (٢٫ + ١ ، - ١) يساوي ٥ **أوجد قيمة** ٫

إحداثيا منتصف قطعة مستقيمة

قاعدة هامة

إذا كانت ٩($س_١$، $ص_١$) ، ب($س_٢$، $ص_٢$) وكانت حـ منتصف $\overline{٩ب}$

فإن : حـ = $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} \right)$

أي أن : البعد بين النقطتين = $\left(\frac{\text{مجموع السينات}}{٢} ، \frac{\text{مجموع الصادات}}{٢} \right)$

($س_١$، $ص_١$) ٩ — (س ، ص) حـ — ($س_٢$، $ص_٢$) ب

مثال ١ : أكمل ما يأتي :

(١) نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين ٩(٢ ، ٥) ، ب(٤ ، ٣) هي النقطة ....

(الحل) م = $\left(\frac{٢+٤}{٢} ، \frac{٥+٣}{٢} \right)$ = (٣ ، ٤)

(٢) إذا كانت: ٩(−١ ، ٢) ، ب(٥ ، −٢) فإن: منتصف $\overline{٩ب}$ = ...

(الحل) م = $\left(\frac{-١+٥}{٢} ، \frac{٢-٢}{٢} \right)$ = (٢ ، ٠)

(٣) إذا كانت: $\overline{٩ب}$ قطر في دائرة حيث ٩(٣ ، −٥) ، ب(−٥ ، ١)

فإن: إحداثيي نقطة مركز الدائرة هو ....

(الحل) م = $\left(\frac{٣-٥}{٢} ، \frac{-٥+١}{٢} \right)$ = (−١ ، −٢)

مثال ٢ : إذا كانت: حـ(٦ ، −٤) هي منتصف $\overline{٩ب}$ حيث ٩(٥ ، −٣)

فأوجد إحداثي نقطة ب

(٥، −٣) ٩ — (٦، −٤) حـ — (س، ص) ب

(الحل) ∵ حـ منتصف $\overline{٩ب}$

∴ $\left(\frac{س+٥}{٢} ، \frac{ص-٣}{٢} \right)$ = (٦ ، −٤)

$\frac{س+٥}{٢}$ = ٦ ، $\frac{ص-٣}{٢}$ = −٤

س + ٥ = ١٢ ، ص − ٣ = −٨

⟸ **س = ٧** ، **ص = −٥**

∴ **النقطة ب(٧ ، −٥)**

مثال ٣ : إذا كانت النقطة حـ(٤ ، ٦) منتصف $\overline{٩ب}$ حيث ٩(س ، ٣) ، ب(٦ ، ص)

فأوجد قيمة: س ، ص

(س، ٣) ٩ — (٤، ٦) حـ — (٦، ص) ب

(الحل) ∵ حـ منتصف $\overline{٩ب}$

∴ $\left(\frac{س+٦}{٢} ، \frac{ص+٣}{٢} \right)$ = (٤ ، ٦)

$\frac{س+٦}{٢}$ = ٤ ، $\frac{ص+٣}{٢}$ = ٦

س + ٦ = ٨ ، ص + ٣ = ١٢

⟸ **س = ٢** ، **ص = ٩**

حل أخر لمثال ٢ : ب = ٢ حـ − ٩ = (١٢ ، −٨) − (٥ ، −٣) = (٧ ، −٥)

ملاحظة هامة جداً :

❖ **لإيجاد إحداثي نقطة في الأشكال التالية :**

(متوازي الأضلاع ، المستطيل ، المربع ، المعين) نستخدم نقطة تقاطع القطرين مرتين

مثال ٤ : ٱ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه :

ٱ(٣ ، ٢) ، ب (٤ ، −٥) ، حـ(٠ ، −٣)

أوجد إحداثي نقطة تقاطع قطريه م

ثم أوجد إحداثي نقطة ء

(الحل)

∵ م منتصف $\overline{ٱحـ}$

∴ م = ($\frac{٣+٠}{٢}$ ، $\frac{٢-٣}{٢}$) = ($\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{-١}{٢}$)

∵ م منتصف $\overline{بء}$

∴ ($\frac{س+٤}{٢}$ ، $\frac{ص-٥}{٢}$) = ($\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{-١}{٢}$)

$\frac{س+٤}{٢} = \frac{٣}{٢}$ ، $\frac{ص-٥}{٢} = \frac{-١}{٢}$

س + ٤ = ٣ ، ص − ٥ = −١

⟸ **س = −١** ، **ص = ٤**

∴ **النقطة ء(− ١ ، ٤)**

مثال ٥ : $\overline{ٱب}$ قطر في الدائرة التي مركزها م فإذا كانت ب(٨ ، ١١) ، م(٥ ، ٧)

أوجد: ① **إحداثي ٱ**

② **محيط الدائرة (π = ٣,١٤)**

(الحل) ∵ م منتصف $\overline{ٱب}$

∴ ($\frac{س+٨}{٢}$ ، $\frac{ص+١١}{٢}$) = (٥ ، ٧)

$\frac{س+٨}{٢} = ٥$ ، $\frac{ص+١١}{٢} = ٧$

س + ٨ = ١٠ ، ص + ١١ = ١٤

⟸ **س = ٢** ، **ص = ٣**

∴ **النقطة ٱ(٢ ، ٣)**

⟸ م ب = $\sqrt{(٨-٥)^٢ + (١١-٧)^٢}$

∴ نق = ٥ وحدة طول

∴ محيط الدائرة = ٢ π نق

= ٢ × ٥ × ٣,١٤ = ٣١,٤ وحدة طول

مثال ٦ : **أثبت أن النقط** : ٱ(−٣ ، ٠) ، ب(٣ ، ٤) ، حـ(١ ، −٦) هي رؤوس مثلث متساوي الساقين رأسه ٱ **ثم أوجد** طول القطعة المستقيمة المرسومة من ٱ عمودية على $\overline{بحـ}$

(الحل)

∵ ٱ ب = $\sqrt{(-٣-٣)^٢ + (٠-٤)^٢} = ٢\sqrt{١٣}$

، ب حـ = $\sqrt{(٣-١)^٢ + (٤+٦)^٢} = ٢\sqrt{٢٦}$

، ٱ حـ = $\sqrt{(-٣-١)^٢ + (٠+٦)^٢} = ٢\sqrt{١٣}$

∵ ٱ ب = ٱ حـ = $٢\sqrt{١٣}$

∴ △ ٱ ب حـ متساوي الساقين رأسه ٱ ⌫⌧

∵ ٱ ب = ٱ حـ ، ٱ ء ⊥ $\overline{بحـ}$

∴ ء منتصف $\overline{بحـ}$

ء = ($\frac{٣+١}{٢}$ ، $\frac{٤-٦}{٢}$) = (٢ ، −١)

∵ ٱ(−٣ ، ٠) ، ء(٢ ، −١)

∴ ٱ ء = $\sqrt{(-٣-٢)^٢ + (٠+١)^٢}$

= $\sqrt{٢٦}$ وحدة طول

تمارين (٥)

١ أكمل ما يأتي :

① **إذا كانت:** م(١ ، ٢) ، ب(٣ ، ٤) **فإن: إحداثي نقطة منتصف م ب هي** ....
[(١ ، ٣) ، (٣ ، ٣) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٢)]

② **إذا كانت:** م(٢ ، −٢) ، ب(−٢ ، ٢) **فإن: منتصف م ب هي** ....
[(−١ ، ١) ، (١ ، −١) ، (٤ ، −٤) ، (٠ ، ٠)]

③ نقطة منتصف م ب حيث م(٠ ، ٢) ، ب(−٤ ، ٠) **هي** ....
[(−٢ ، ١) ، (١ ، −٢) ، (٢ ، −١) ، (−١ ، ٢)]

④ **إذا كانت:** حـ منتصف م ب حيث م(٤ ، −٣) ، ب(٢ ، −١) **فإن: إحداثي حـ =** ....
[(٣ ، −٢) ، (٦ ، −٤) ، (٤ ، ٢) ، (−٣ ، −١)]

⑤ إحداثي نقطة منتصف القطعة المستقيمة المرسومة بين النقطتين (٣ ، −٨) ، ب(−٣ ، ٤)
هي النقطة .... [(٠ ، −٤) ، (٠ ، −٢) ، (٠ ، ٤) ، (٠ ، ٢)]

⑥ **إذا كانت:** النقطة حـ(ك−٢ ، م) هي منتصف م ب حيث م(−١ ، ٣) ، ب(٣ ، −٥)
فإن (ك ، م) = ... [(٣ ، −٢) ، (٤ ، −١) ، (٤ ، −٢) ، (٣ ، −١)]

⑦ م ب قطر في الدائرة مركزها م حيث م(٣ ، ٦) ، ب(٥ ، −٢) **فإن إحداثي م =** ....
[(٤ ، ٢) ، (٤ ، ٦) ، (٨ ، ٤) ، (٢ ، ٨)]

⑧ م ب قطر في الدائرة حيث م(−٦ ، ٧) ، ب(٤ ، −٥) **فإن مركز الدائرة هو** ....
[(−١ ، −١) ، (١ ، ١) ، (١ ، −١) ، (−١ ، ١)]

⑨ إذا كانت نقطة الأصل هي منتصف م ب حيث م(٥ ، −٢) **فإن إحداثي ب =** ....
[(٥ ، −٢) ، (−٥ ، −٢) ، (−٥ ، ٢) ، (٥ ، ٢)]

⑩ إذا كانت (٢ ، ١) نقطة منتصف م ب حيث م(٣ ، −٤) ، ب(م ، ٦) **فإن م =** ....
[٦ ، ٤ ، ٣ ، ١]

٢ تمارين متنوعة :

① **أوجد إحداثي** نقطة حـ منتصف م ب حيث م(٣ ، −٧) ، ب(−٥ ، −٣)

② **إذا كانت:** م(٢ ، −١) ، ب(٥ ، ٣) **نقطتين أوجد:** ① **طول** م ب ② **إحداثي نقطة منتصف** م ب

③ **إذا كانت:** م(−١ ، −١) ، ب(٢ ، ٣) ، حـ(٦ ، ٠) ، ء(٣ ، −٤)
أربع نقط في مستوي إحداثي متعامد **أثبت أن:** م حـ ، ب ء **ينصف كل منهما الأخر.**

④ **إذا كانت:** حـ(٣ ، ٧) هي منتصف م ب حيث م(٢ ، ٦) **أوجد إحداثي نقطة** ب

⑤ **إذا كانت:** حـ(١ ، ٢) هي منتصف م ب حيث م(٣ ، −٤) **أوجد إحداثي نقطة** ب

⑥ **إذا كانت**: حـ(٠ ، ٤) هي منتصف $\overline{أب}$ حيث أ(− ١ ، − ١) **أوجد إحداثي نقطة** ب

⑦ **إذا كانت**: حـ منتصف $\overline{أب}$ حيث أ(س ، ٧)، ب(١ ، ص)، حـ(٣ ، ٣) **أوجد قيمة**: س، ص

⑧ **إذا كانت**: حـ منتصف $\overline{أب}$ حيث أ(− ٣ ، ص)، ب(٣ ، ١٢)، حـ(س ، ٧) **أوجد قيمة**: س، ص

⑨ **إذا كانت**: حـ منتصف $\overline{أب}$ حيث أ(− ٣ ، ص)، ب(٩ ، − ٧)، حـ(س ، − ٣) **أوجد قيمة**: س، ص

⑩ **إذا كانت**: نقطة الأصل منتصف $\overline{أب}$ حيث أ(س− ٢ ، ص)، ب(− ٢ ، ٢) **أوجد قيمة**: س، ص

⑪ $\overline{أب}$ قطر في الدائرة التي مركزها **م** فإذا كانت ب(٧ ، ٩) ، **م**(٤ ، ٥)

أوجد: ① **إحداثي نقطة** أ ② **محيط الدائرة** (π = ٣,١٤)

⑫ أ ب حـ ء متوازي أضلاع تقاطع قطراه في هـ حيث أ(٣ ، ٢) ، ب(٨ ، ٢) ، حـ(٥، ٦)

أوجد : ① **إحداثي كل من هـ ، ء** ① **طول** $\overline{ءهـ}$

⑬ أ ب حـ ء متوازي أضلاع تقاطع قطراه في هـ حيث أ(٣ ، − ١) ، ب(٦ ، ٢) ، حـ(١ ، ٧)

أوجد إحداثي نقطة تقاطع القطرين هـ ثم أوجد إحداثي نقطة ء

⑭ أ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه أ(٤ ، − ١) ، ب(− ١ ، ٥) ، حـ(٢ ، − ٣)

أوجد إحداثي نقطة تقاطع القطرين م ثم أوجد إحداثي نقطة ء

⑮ أ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه: أ(٣ ، ٤) ، ب (٢ ، − ١) ، حـ(− ٤ ، − ٣) **أوجد إحداثي ء**

⑯ **إذا كانت النقاط** أ(٣ ، ٢) ، ب(٤ ، − ٣) ، حـ(− ١ ، − ٢) ، حـ(− ٢ ، ٣)

رؤوس معين **أوجد**: ① **إحداثيي نقطة تقاطع القطرين** ② **مساحة المعين** أ ب حـ ء

⑰ **أثبت أن النقط** أ(٦ ، ٠)، ب(٢ ، − ٤)، حـ(− ٤ ، ٢) **هي رؤوس مثلث قائم الزاوية في** ب

، **ثم أوجد إحداثي نقطة ء** التي تجعل الشكل **أ ب حـ ء مستطيلاً**

⑱ **أثبت أن النقط** أ(٥ ، ٣)، ب(٣ ، − ٢)، حـ(− ٢ ، − ٤) **هي رؤوس مثلث منفرج الزاوية في** ب

، **ثم أوجد إحداثي نقطة ء** التي تجعل الشكل **أ ب حـ ء معيناً وأوجد مساحة سطحه**

⑲ △ أ ب حـ **فيه** أ(٠ ، ٨) ، ب(٣ ، ٢) ، حـ(− ٣ ، ٦) ، $\overline{أء}$ متوسط ، م منتصف $\overline{أء}$

أوجد: **إحداثيي نقطتي** ء ، م

⑳ س ص ع مثلث رؤوسه هي: س(١ ، ١) ، ص(٠ ، ٤) ، ع(− ١ ، ١)

① **أثبت أن**: △ س ص ع متساوي الساقين ② **أوجد**: مساحة سطح △ س ص ع

ميل الخــط المستقيـم

يمكن إيجاد الميل بأربع طرق مختلفة كما يلي :

① **إيجاد ميل خط مستقيم يمر بنقطتيــن :**

ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين أ $(س_1 ، ص_1)$ ، ب $(س_2 ، ص_2)$

فإن : م = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$ حيث $س_1 \neq س_2$

---

② **إيجاد ميل خط مستقيم يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات :**

ميل الخط المستقيم هو ظل الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

أي أن : ميل الخط المستقيم = ظا هـ (هـ زاوية ميل الخط المستقيم)

حيث (١) هـ قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

(٢) تكون الزاوية الموجبة إذا كانت مأخوذة في عكس عقارب اتجاه الساعة

، وتكون الزاوية السالبة إذا كانت في اتجاه عقارب الساعة

---

③ **إيجاد ميل خط مستقيم من معادلة الخط المستقيم :**

ثانيًا : إذا كان معادلة الخط المستقيم على الصورة:	**أولاً** : إذا كان معادلة الخط المستقيم على الصورة:
أ س + ب ص + حـ = ٠	ص = م س + حـ
فإن :	**فإن :**
❁ ميل الخط المستقيم = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-أ}{ب}$	❁ ميل الخط المستقيم = معامل س = م

ملاحـظــات هامة : ⇩

❶ ميل أي مستقيم أفقي (يوازى محور السينات) = صفر $(ص_1 = ص_2)$

❷ ميل أي مستقيم رأسي (يوازى محور الصادات) = غير معرف $(س_1 = س_2)$

❸ إذا كان المستقيم يصنع **زاوية حادة** مع الاتجاه الموجب لمحور السينات **فإن ميله موجب**

❹ إذا كان المستقيم يصنع **زاوية منفرجة** مع الاتجاه الموجب لمحور السينات **فإن ميله سالب**

مثال ١ : أوجد ميل $\overleftrightarrow{أب}$ إذا كان :

① أ(٧ ، ٢) ، ب(٤ ، ١) (الحل) ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{٢-١}{٧-٤} = \boxed{\frac{١}{٣}}$	② أ(٢ ، ٣) ، ب(-١ ، ٥) (الحل) ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{٣-٥}{٢+١} = \boxed{\frac{-٢}{٣}}$
③ أ(٢ ، -٣) ، ب(٤ ، ٥) (الحل) ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{-٣-٥}{٢-٤} = \boxed{٤}$	④ أ(١ ، ٣) ، ب(٠ ، ٠) (الحل) ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{٣-٠}{١-٠} = \boxed{٣}$

مثال ٢ : أوجد ميل المستقيم الذي يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات :

① بزاوية قياسها ٤٥° (الحل) الميل = طا هـ = طا ٤٥° = $\boxed{١}$	② بزاوية قياسها ٣٠° (الحل) الميل = طا ٣٠° = $\boxed{\frac{\sqrt{٣}}{٣}}$	① بزاوية قياسها ١٣٥° (الحل) الميل = طا ١٣٥° = $\boxed{-١}$

مثال ٣ : أوجد الميل من المعادلات الآتية :

① ص = ٤ س - ٣ (الحل) ∴ الميل = معامل س = ٤	② ص = س + ٥ (الحل) ∴ الميل = معامل س = ٤
③ ٢ص = ٦ س - ٨ (÷٢) (الحل) ∵ المعادلة: ص = ٣ س - ٤ ∴ الميل = ٣	④ ٣ص = ٢ س - ٥ (÷٣) (الحل) ∵ المعادلة: ص = $\frac{٢}{٣}$ س - $\frac{٥}{٣}$ ∴ الميل = $\frac{٢}{٣}$
⑤ ص = $\frac{س+٢}{٣}$ (الحل) ∵ المعادلة: ص = $\frac{١}{٣}$ س + $\frac{٢}{٣}$ ∴ الميل = $\frac{١}{٣}$	⑥ ٢ س + ٣ ص - ٦ = ٠ (الحل) ∴ الميل = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-٢}{٣}$
⑦ ٣ س - ٤ ص = ١٢ (الحل) ∴ الميل = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{٣}{٤}$	⑧ ٢ س = ٤ - ص (الحل) ∵ المعادلة: ص + ٢ س - ٤ = ٠ ∴ الميل = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = - ٢

مثال ٤ : **أوجد قياس الزاوية الموجبة (هـ) التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات إذا كان :**

① ميل المستقيم = ١	② ميل المستقيم = $\sqrt{3}$
(الحل)	**(الحل)**
∵ **الميل = طا هـ = ١**	∵ **الميل = طا هـ = $\sqrt{3}$**
∴ **ق(∠ هـ)= ٤٥°** Shift tan ١ =	∴ **ق(∠ هـ)= ٦٠°** Shift tan $\sqrt{3}$ =

مثال ٥ : **إيجاد قياس الزاوية الموجبة (هـ) :**

① **أوجد قياس الزاوية الموجبة (هـ) التي يصنعها المستقيم ل مع الاتجاه الموجب لمحور السينات إذا كان المستقيم ل يمر بالنقطتين (−٣ ، −٢) ، (٤ ، ٥)**	② **أوجد قياس الزاوية الموجبة (هـ) التي يصنعها المستقيم** ٢س + ٢ص − ٥ = ٠ **مع الاتجاه الموجب لمحور السينات**
(الحل)	**(الحل)**
∵ ميل المستقيم ل = $\frac{-٢-٥}{-٣-٤}$ = ١	∴ **الميل** = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = $\frac{-٢}{٢}$ = −١
∴ **الميل = طا هـ = ١**	∵ **الميل = طا هـ = −١**
∴ **ق(∠ هـ)= ٤٥°**	∴ **ق(∠ هـ)= −٤٥°**
	= ١٨٠° − ٤٥° = **١٣٥°**

مثال ٦ : **أكمل ما يأتي :**

① **إذا كان:** $\overleftrightarrow{أب}$ يوازي محور السينات حيث أ(٨ ، ٣) ، ب(٢ ، ك) **فإن: ك =**.........

(الحل) ∵ $\overleftrightarrow{أب}$ // محور السينات ∴ $ص_١ = ص_٢$ ⟸ **ك = ٣**

② **إذا كان:** $\overleftrightarrow{حـ ء}$ يوازي محور الصادات حيث حـ(م ، ٤) ، ء(−٥ ، ٧) **فإن: ك =**.........

(الحل) ∵ $\overleftrightarrow{أب}$ // محور الصادات ∴ $س_١ = س_٢$ ⟸ **م = −٥**

③ **إذا كان:** $\overleftrightarrow{أب}$ يوازي محور الصادات حيث أ(٧ ، ٥) ، ب(ل ، ل) **فإن: ل =**..........

(الحل) ∵ $\overleftrightarrow{أب}$ // محور الصادات ∴ $س_١ = س_٢$ ⟸ **ل = ٧**

④ **إذا كان المستقيم ل : أ**س − ٥ص + ٧ = ٠ يوازي محور السينات **فإن: أ =**..........

(الحل) ∵ **الميل** = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = $\frac{-أ}{-٥}$ = صفر ⟸ **أ = صفر**

تمارين (٦)

١ أكمل ما يأتي :

① ميل المستقيم المار بالنقطتين: (٣ ، ٥) ، (١ ، ٤) هو ....
② ميل المستقيم المار بالنقطتين: (-٢ ، ٣) ، (-١ ، ١) هو ....
③ ميل المستقيم الذي يصنع زاوية موجبة قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات هو ....
④ ميل المستقيم الموازي لمحور السينات هو ....
⑤ ميل المستقيم الموازي لمحور الصادات هو ....
⑥ ميل الخط المستقيم الموازي للخط المستقيم ص + ٢ = ٠ يساوي ....
⑦ إذا كان ميل خط مستقيم أكبر من الصفر فإن: نوع الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات تكون ....

٢ أوجد ميل الخط المستقيم في كل مما يأتي :

① ص = ٣ س + ٤	② ص = س - ٣
③ ص = $\frac{٣}{٤}$ س + ٦	④ ٢ص = ٤ س + ٨
⑤ ٣ص = ٢ س - ٦	⑥ ٢ص = $\frac{١}{٢}$ (٣ - ٥ س)
⑦ ٣س + ٤ ص - ٥ = ٠	⑧ ٢س - ص + ٤ = ٠
⑨ س - ص + ٣ = ٠	⑩ ص - ٣س = ٦
⑪ ٢ص + ٦س = ٥	⑫ ٣س - ٢ص = ٨

٣ تمارين متنوعة :

① أوجد قياس الزاوية الموجبة (هـ) التي يصنعها المستقيم ل مع الاتجاه الموجب لمحور السينات إذا كان المستقيم ل يمر بالنقطتين (-١ ، -١) ، (٤ ، ٤)
② أوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم : ص = س + ١ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات
③ إذا كان المستقيم : $\overline{أب}$ يوازي محور السينات حيث أ(٥ ، -٤) ، ب(٤ ، ك) أوجد قيمة: ك
④ إذا كان المستقيم : $\overline{حء}$ يوازي محور الصادات حيث حـ(٤ ، ٢) ، ء(ب ، ب) أوجد قيمة: ب
⑤ إذا كان المستقيم : ص = ك س + ٥ يوازي محور السينات أوجد قيمة: ك
⑥ إذا كان المستقيم : المار بالنقطتين (١ ، ص) ، (٣ ، ٤) ميله يساوي طا ٤٥° أوجد قيمة: ص
⑦ إذا كان ميل المستقيم ٦ص = أ س + ٥ يساوى $\frac{٣}{٢}$ أوجد قيمة: أ
⑧ إذا كان ميل المستقيم أس - ص + ٥ = ٠ يساوى ٣ أوجد قيمة: أ

العلاقة بين ميلي المستقيمين (المتوازيين - المتعامدين)

أولاً : العلاقة بين ميلي المستقيمين المتوازيين

إذا كان: ل$_1$ ، ل$_2$ مستقيمين ميلاهما م$_1$ ، م$_2$ على الترتيب

❶ **إذا كان: ل$_1$ // ل$_2$ فإن: م$_1$ = م$_2$**

أي أنه :

(إذا توازي مستقيمان فإن ميلهما يكونان متساويين)

❷ **إذا كان: م$_1$ = م$_2$ فإن: ل$_1$ // ل$_2$**

أي أنه :

(إذا تساوي ميلا مستقيمين كان المستقيمان متوازيان)

ثانياً : العلاقة بين ميلي المستقيمين المتعامدين

إذا كان: ل$_1$ ، ل$_2$ مستقيمين ميلاهما م$_1$ ، م$_2$ على الترتيب

❶ **إذا كان: ل$_1$ ⊥ ل$_2$ فإن: م$_1$ × م$_2$ = -١**

أي أنه :

(حاصل ضرب ميلي المستقيمين المتعامدين = -١)

❷ **إذا كان: م$_1$ × م$_2$ = -١ فإن: ل$_1$ ⊥ ل$_2$**

أي أنه :

(إذا كان حاصل ضرب ميلي المستقيمين = -١
فإن: المستقيمان متعامدين)

أولاً : أمثلة على ميلي المستقيمين المتوازيين :

مثال ١ : أكمل ما يأتي :

① إذا كان: $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{حـ ء}$ وكان ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{١}{٢}$ **فإن: ميل $\overleftrightarrow{حـ ء}$ = ...** **(الحل)** = $\frac{١}{٢}$

② المستقيم الذي ميله $\frac{٣}{٤}$ يوازي مستقيماً ميله .... **(الحل)** = $\frac{٣}{٤}$

③ ميل المستقيم **الموازي** للمستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٥) ، (-١ ، ١) **يساوي** ....

(الحل) ∵ الميل = $\frac{٥-١}{٣+١}$ = $\frac{٢}{٣}$ ∴ ميل المستقيم الموازي = $\frac{٢}{٣}$

④ ميل المستقيم **الموازي** للمستقيم: ص = ٣س - ٧ يساوي ....

(الحل) ∵ **الميل = معامل س = ٣** ∴ ميل المستقيم الموازي = ٣

مثال ٢ : أثبت أن : المستقيم الذي يمر بالنقطتين (٢ ، -١) ، (٦ ، ٣) **يوازي** المستقيم الذي يصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

(الحل)

∵ م$_1$ = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$ = $\frac{-١-٣}{٢-٦}$ = ١

، م$_2$ = ظا هـ = ظا ٤٥° = ١

∴ م$_1$ = م$_2$ ∴ **المستقيمان متوازيان**

مثال ٣ : أثبت أن : المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ حيث أ(٢ ، ٣) ، ب(-٢ ، ١) **يوازي** المستقيم **الذي معادلته :** س - ٢ص + ٨ = ٠

(الحل)

∵ **ميل** $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$ = $\frac{٣-١}{٢+٢}$ = $\frac{١}{٢}$

، ميل المستقيم الثاني = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = $\frac{-١}{-٢}$ = $\frac{١}{٢}$

∴ م$_1$ = م$_2$ ∴ **المستقيمان متوازيان**

ثانياً : أمثلة على ميلي المستقيمين المتعامدين :

مثال ٤ : **أكمل ما يأتي :**

① **إذا كان:** $\overleftrightarrow{أب} \perp \overleftrightarrow{جـ د}$ وكان ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{-٢}{٣}$ **فإن: ميل** $\overleftrightarrow{جـ د}$ = ... **(الحل)** $= \frac{٣}{٢}$

② **إذا كان:** ميل المستقيم ل هو $\frac{١}{٤}$ **فإن:** ميل المستقيم العمودي عليه .... **(الحل)** = − ٤

③ **إذا كان:** المستقيم ل عموديًا على المستقيم المار بالنقطتين (− ١ ، ٢) ، (٠ ، ٥)

فإن: ميل المستقيم ل = ...

(الحل) ∵ **الميل** $= \frac{٢ - ٥}{-١ - ٠} = ٣$ ∴ **ميل العمودي** $= \frac{-١}{٣}$

④ ميل المستقيم **العمودي على** المستقيم: ٤ س + ٣ص = ٧ يساوي ....

(الحل) ∵ **الميل** = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-٤}{٣}$ ∴ **ميل العمودي** $= \frac{٤}{٣}$

مثال ٥ : **أثبت أن** : المستقيم $ل_١$ الذي يمر بالنقطتين (٤ ، $٣\sqrt{٣}$) ، (٥ ، $٢\sqrt{٣}$) **عموديًا على** المستقيم الذي يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٣٠°

(الحل)

∵ $م_١ = \frac{٣\sqrt{٣} - ٢\sqrt{٣}}{٤ - ٥} = -\sqrt{٣}$

، $م_٢$ = طا هـ = طا ٣٠° $= \frac{\sqrt{٣}}{٣}$

∴ $م_١ \times م_٢ = -\sqrt{٣} \times \frac{\sqrt{٣}}{٣} = -١$

∴ **المستقيمان متعامدين**

مثال ٦ : **أثبت أن** : المستقيم **الذي معادلته** : ٢س + ص + ٨ = ٠ **عمودي على** المستقيم المار بالنقطتين: أ(٢ ، ٣) ، ب(− ٢ ، ١)

(الحل)

∵ **ميل المستقيم الأول** = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-١}{-٢} = -٢$

، **ميل** $\overleftrightarrow{أب} = \frac{٣ - ١}{٢ + ٢} = \frac{١}{٢}$

∴ $م_١ \times م_٢ = -٢ \times \frac{١}{٢} = -١$

∴ **المستقيمان متعامدين**

ملاحظة هامة :

إذا كان أحد المستقيمين يوازي محور س والآخر يوازي محور ص فإن: المستقيمان متعامدين

تدريب : **أثبت أن** : المستقيم المار بالنقطتين (− ٢ ، ١) ، (٣ ، ١) **يكون عموديًا على** المستقيم المار بالنقطتين (− ١ ، ٠) ، (− ١ ، ٢)

مثال ٧ : إذا كان المستقيمان اللذان ميلاهما $\frac{-٢}{٣}$ ، $\frac{ك}{٦}$ **متوازيان أوجد: قيمة ك**

(الحل) ∵ المستقيمان متوازيان

∴ $م_١ = م_٢$

∴ $\frac{-٢}{٣} = \frac{ك}{٦} \Leftarrow ك = \frac{-٢ \times ٦}{٣} = \boxed{-٤}$

مثال ٨ : إذا كان المستقيمان اللذان ميلاهما $\frac{-٢}{٣}$ ، $\frac{ك}{٦}$ **متعامدين أوجد: قيمة ك**

(الحل) ∵ المستقيمان متعامدين

∴ $م_١ \times م_٢ = -١ \Leftarrow \frac{-٢}{٣} \times \frac{ك}{٦} = -١$

∴ $\frac{ك}{٦} = \frac{٣}{٢} \Leftarrow ك = \frac{٦ \times ٣}{٢} = \boxed{٩}$

مثال ٩ : إذا كان: المستقيم $ل_١$ يمر بالنقطتين (−٣ ، ١) ، (٢ ، م) والمستقيم $ل_٢$ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥°

أوجد: قيمة م إذا كان المستقيمان $ل_١$ ، $ل_٢$

أولاً : متوازيين ثانيًا : متعامدين

(الحل)

∵ $م_١ = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{م - ١}{٢ + ٣} = \boxed{\frac{م - ١}{٥}}$

، $م_٢ = ط‍ا هـ = ط‍ا ٤٥° = \boxed{١}$

أولاً : إذا كان المستقيمان متوازيان

∴ $م_١ = م_٢ \Leftarrow \frac{م - ١}{٥} = \frac{١}{١}$

∴ $م - ١ = ٥ \Leftarrow \boxed{م = ٦}$

ثانيًا : إذا كان المستقيمان متعامدين

∴ $م_١ \times م_٢ = -١$

$\Leftarrow \frac{م - ١}{٥} \times ١ = -١$

∴ $م - ١ = -٥$

$\Leftarrow \boxed{م = -٤}$

مثال ١٠ : إذا كانتا معادلتا المستقيمين $ل_١$ ، $ل_٢$ على الترتيب :

٢س − ٣ص + م = ٠ ، ٣س + ب ص − ٦ = ٠

فأوجد : ① **قيمة ب التي تجعل $ل_١$ ، $ل_٢$ متوازيين**

② **قيمة ب التي تجعل $ل_١$ ، $ل_٢$ متعامدان**

③ **إذا كانت النقطة (١ ، ٣) تقع على المستقيم $ل_١$ فأوجد قيمة م**

(الحل)

∵ $م_١ = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-٢}{-٣} = \boxed{\frac{٢}{٣}}$

، $م_٢ = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \boxed{\frac{-٣}{ب}}$

أولاً : إذا كان المستقيمان متوازيان

∴ $م_١ = م_٢ \Leftarrow \frac{٢}{٣} = \frac{-٣}{ب}$

∴ $ب = \frac{-٣ \times ٣}{٢} = \boxed{\frac{-٩}{٢}}$

ثانيًا : إذا كان المستقيمان متعامدين

∴ $م_١ \times م_٢ = -١$

$\Leftarrow \frac{٢}{٣} \times \frac{-٣}{ب} = -١$

∴ $\frac{-٣}{ب} = \frac{-٣}{٢} \Leftarrow \boxed{ب = ٢}$

ثالثًا : النقطة (١ ، ٣) تقع على المستقيم $ل_١$: ٢س − ٣ص + م = ٠

∴ ٢ × ١ − ٣ × ٣ + م = ٠

$\Leftarrow$ −٧ + م = ٠ $\Leftarrow$ $\boxed{م = ٧}$

ملاحظة هامة : إذا كان : ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ميل $\overleftrightarrow{بح}$ **فإن:** أ ، ب ، ح تقع على استقامة واحدة

مثال ١١ : **أثبت أن:** أ(٠ ، ٢) ، ب(٤ ، ٨) ، ح(٦ ، ١١) **تقع على استقامة واحدة**

(الحل)

∵ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{٢-٨}{٠-٤}$ = $\boxed{\frac{٣}{٢}}$

، ميل $\overleftrightarrow{بح}$ = $\frac{٨-١١}{٤-٦}$ = $\boxed{\frac{٣}{٢}}$

∴ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ميل $\overleftrightarrow{بح}$ ، ب نقطة مشتركة

∴ النقط أ ، ب ، ح تقع على استقامة واحدة

مثال ١٢ : **إذا كانت:** أ(٠ ، ١) ، ب(ك ، ٣) ، ح(٢ ، ٥) تقع على استقامة واحدة **أوجد:** ك

(الحل)

∵ النقط أ ، ب ، ح تقع على استقامة واحدة

∴ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ميل $\overleftrightarrow{أح}$

∴ $\frac{٣-١}{ك-٠}$ = $\frac{٥-١}{٢-٠}$

∴ $\frac{٢}{ك}$ = $\frac{٢}{١}$ ⟸ ك = $\frac{٢×١}{٢}$ = $\boxed{١}$

ملاحظة هامة : إذا كان △ أ ب ح قائم الزاوية في ب **فإن:** ميل $\overleftrightarrow{أب}$ × ميل $\overleftrightarrow{بح}$ = -١

مثال ١٣ : **باستخدام الميل أثبت أن النقط :** أ(-١ ، -١) ، ب(٢ ، ٣) ، ح(٦ ، ٠) هي رؤوس مثلث قائم الزاوية في ب

(الحل)

∵ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{-١-٣}{-١-٢}$ = $\boxed{\frac{٤}{٣}}$

، ميل $\overleftrightarrow{بح}$ = $\frac{٣-٠}{٢-٦}$ = $\boxed{\frac{-٣}{٤}}$

∴ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ × ميل $\overleftrightarrow{بح}$ = -١

⟸ $\overleftrightarrow{أب}$ ⊥ $\overleftrightarrow{بح}$

∴ أ ب ح مثلث قائم الزاوية في ب

مثال ١٤ : إذا كان المثلث الذي رؤوسه النقط أ(٣ ، ٥) ، ب(٤ ، ٢) ، ح(-٥ ، س) قائم الزاوية في ب **فأوجد قيمة: س**

(الحل)

∵ △ أ ب ح قائم الزاوية في ب

∴ $\overleftrightarrow{أب}$ ⊥ $\overleftrightarrow{بح}$

∴ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ × ميل $\overleftrightarrow{بح}$ = -١

$\frac{٥-٢}{٣-٤}$ × $\frac{س-٢}{-٥-٤}$ = -١

-٣ × $\frac{س-٢}{-٩}$ = -١

∴ $\frac{س-٢}{-٩}$ = $\frac{١}{٣}$ ⟸ س - ٢ = $\frac{-٩×١}{٣}$

∴ س - ٢ = -٣ ⟸ $\boxed{س = -١}$

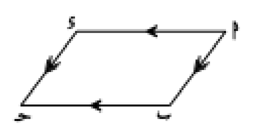
ملاحظات هامة لحل مسائل الأشكال الرباعية " باستخدام الميل "

لإثبات أن الشكل الرباعي ا ب ح ء :

❶ **شبه منحرف** **نثبت أن:** $\overleftrightarrow{\text{اء}}$ // $\overleftrightarrow{\text{بح}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{اب}}$ لا يوازي $\overleftrightarrow{\text{حء}}$

(ضلعين متقابلين فيه متوازيين والضلعان الآخران غير متوازيين)

❷ **متوازي أضلاع** **نثبت أن:** $\overleftrightarrow{\text{اب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{حء}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{بح}}$ // $\overleftrightarrow{\text{اء}}$



(كل ضلعين متقابلين متوازيان)

➢ **لإثبات أن الشكل الرباعي مستطيل أو معين أو مربع فإننا نثبت أولاً أن هذا الشكل متوازي أضلاع كما سبق ،ثم:**

المستطيل	المعين	المربع
ضلعان متجاوران فيه متعامدين	القطران متعامدان	ضلعان متجاوران فيه متعامدان والقطران متعامدان

مثال ١٥ : **أثبت أن النقط** : ا(-١ ، ٢) ، ب(-١ ، -١) ، ح(٧، ٣) ، ء(٣، ٤) هي رؤوس شبه منحرف

(الحل)

∵ ميل $\overleftrightarrow{\text{اب}} = \frac{-١-٢}{-١+١} = \frac{-٣}{٠} =$ **غير معرف**

، ميل $\overleftrightarrow{\text{بح}} = \frac{٣+١}{٧+١} = \boxed{\frac{١}{٢}}$

، ميل $\overleftrightarrow{\text{حء}} = \frac{٤-٣}{٣-٧} = \boxed{\frac{-١}{٤}}$

، ميل $\overleftrightarrow{\text{اء}} = \frac{٤-٢}{٣+١} = \boxed{\frac{١}{٢}}$

∴ ميل $\overleftrightarrow{\text{بح}}$ = ميل $\overleftrightarrow{\text{اء}}$

⟸ $\overleftrightarrow{\text{بح}}$ // $\overleftrightarrow{\text{اء}}$ (١)

∴ ميل $\overleftrightarrow{\text{اب}}$ ≠ ميل $\overleftrightarrow{\text{حء}}$

⟸ $\overleftrightarrow{\text{اب}}$ لا يوازي $\overleftrightarrow{\text{حء}}$ (٢)

من (١)،(٢): ∴ الشكل ا ب ح ء شبه منحرف

مثال ١٦ : **أثبت باستخدام الميل أن النقط** : ا(٠ ، ٦) ، ب(-١ ، ٣) ، ح(٥ ، ١) ، ء(٦ ، ٤) هي رؤوس مستطيل

(الحل)

∵ ميل $\overleftrightarrow{\text{اب}} = \frac{٦-٣}{٠+١} = \boxed{٣}$

، ميل $\overleftrightarrow{\text{بح}} = \frac{٣-١}{-١-٥} = \boxed{\frac{-١}{٣}}$

، ميل $\overleftrightarrow{\text{حء}} = \frac{٤-١}{٦-٣} = \boxed{٣}$

، ميل $\overleftrightarrow{\text{اء}} = \frac{٦-٤}{٠-٦} = \boxed{\frac{-١}{٣}}$

∴ ميل $\overleftrightarrow{\text{اب}}$ = ميل $\overleftrightarrow{\text{حء}}$ ، ميل $\overleftrightarrow{\text{بح}}$ = ميل $\overleftrightarrow{\text{اء}}$

⟸ $\overleftrightarrow{\text{اب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{حء}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{بح}}$ // $\overleftrightarrow{\text{اء}}$ (١)

∴ ميل $\overleftrightarrow{\text{اب}}$ × ميل $\overleftrightarrow{\text{بح}}$ = -١

⟸ $\overleftrightarrow{\text{اب}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{بح}}$ (٢)

من (١)،(٢): ∴ الشكل ا ب ح ء مستطيل

تمارين (٧)

١ أكمل ما يأتي :

① مستقيمان متوازيان ميلاهما $م_١$ ، $م_٢$ وكان $م_١ = \frac{-١}{٣}$ **فإن:** $م_٢ =$..........
② **إذا كان:** $\overleftrightarrow{أب} \perp \overleftrightarrow{جـ د}$ وكان ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{٥}{٣}$ **فإن: ميل** $\overleftrightarrow{جـ د} =$.........
③ ميل المستقيم **الموازي** للمستقيم المار بالنقطتين (٣ ، −٢) ، (−١ ، ٣) **يساوي** ....
④ المستقيم $ل_١$ يوازي المستقيم $ل_٢$ والمستقيم $ل_٢$ يصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات **فإن: ميل المستقيم** $ل_١ =$.........
⑤ ميل المستقيم **الموازي** للمستقيم ٣س + ٤ص − ٩ = ٠ يساوي ....
⑥ ميل المستقيم **العمودي** علي المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، −٥) ، (−١ ، −١) **يساوي** ....
⑦ ميل المستقيم **العمودي** علي المستقيم ٢س − ٣ص + ٥ = ٠ يساوي ....
⑧ **إذا كان:** أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ،وكان ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{٣}{٥}$ **فإن: ميل** $\overleftrightarrow{ب جـ} =$.........
⑨ Δ أ ب جـ قائم الزاوية في ب فيه أ(١ ، ٥) ، ب(٠ ، ١) **فإن: ميل** $\overleftrightarrow{ب جـ} =$.........
⑩ **إذا كان:** أ ب جـ د متوازي أضلاع **فإن: ميل** $\overleftrightarrow{أب}$ **= ميل** ....
⑪ أ ب جـ د متوازي أضلاع حيث أ(−١ ، ٤) ، ب(٠ ، ١) **فإن: ميل** $\overleftrightarrow{د جـ} =$.........
⑫ **إذا كان:** أ ب جـ د مربعًا قطراه $\overleftrightarrow{أ جـ}$ ، $\overleftrightarrow{ب د}$ حيث أ(٣ ، ٥) ، جـ(٥ ، −١) **فإن: ميل** $\overleftrightarrow{ب د} =$.........
⑬ **إذا كان الخط المستقيم :** س + ص = ٥ **يوازي** أ س + ٣ص = ٨ **فإن:** أ =.........
⑭ **إذا كان المستقيمان :** ٣س + ٢ص = ٥ ، ك س + ٤ص = ٠ **متوازيان** **فإن:** ك =.........
⑮ **مستقيمان متعامدان** ، ميل أحدهما $(-\frac{١}{٤})$ وميل الآخر (٤ك) **فإن:** ك =........
⑯ **إذا كان المستقيم المار بالنقطتين :** (ك ، ٠) ، (٠ ، ٤) **عمودي على المستقيم** الذي يصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات **فإن:** ك =........
⑰ **إذا كان المستقيم :** ٢س + ب ص + ٣ = ٠ **عموديًا علي المستقيم** ٣س − ص + ٢ = ٠ **فإن:** ب =.........

٢ اختر الإجابة الصحيحة :

الأسئلة	اختر
① إذا كان: $م_{١}$ ، $م_{٢}$ ميلي مستقيمين متوازيين فإن:	[$م_{١} - م_{٢} = ٠$ ، $م_{١} + م_{٢} = ٠$ ، $م_{١} \times م_{٢} = ٠$ ، $م_{١} - م_{٢} \neq ٠$]
② إذا كان: $م_{١}$ ، $م_{٢}$ ميلي مستقيمين متعامدين فإن: $م_{١} \times م_{٢} =$..........	[−١ ، $\frac{١}{٢}$ ، ١ ، ٢]
③ المستقيمان: ص = أ س + ب ، ص = حـ س + ء متعامدان فإن: ...... × ...... = −١	[أ × ء ، ب × حـ ، أ × حـ ، ب × ء]
④ إذا كان: $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{حـء}$ ، ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ٠,٧٥ فإن: ميل $\overleftrightarrow{حـء}$ = ...	[$\frac{٤}{٣}$ ، $\frac{٣}{٤}$ ، $-\frac{٣}{٤}$ ، $-\frac{٤}{٣}$]
⑤ إذا كان: $\overleftrightarrow{أب} \perp \overleftrightarrow{حـء}$ ، ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ٠,٥ فإن: ميل $\overleftrightarrow{حـء}$ = ...	[١ ، ٢ ، ٠,٥ ، −٢]
⑥ إذا كان: $\overleftrightarrow{أب} \perp \overleftrightarrow{حـء}$ ، ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = صفر فإن: ميل $\overleftrightarrow{حـء}$ هو	[١ ، −١ ، صفر ، غير معرف]
⑦ المستقيمان اللذان ميلاهما $\frac{٢}{٧}$ ، $-\frac{٧}{٢}$ يكونان	[متوازيين ، متعامدين ، منطبقين ، غير متعامدين]
⑧ المستقيمان: ص = ٣س − ٥ ، ٢ص = ٦س + ٥ هما مستقيمان	[متوازيين ، متعامدين ، منطبقين ، غير متعامدين]

٣ تمارين الإثبات :

① **أثبت أن**: المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٣) ، (٠ ، ٠) **يوازي** المستقيم المار بالنقطتين (−١ ، ٤) ، (١ ، ٧)

② **أثبت أن**: المستقيم الذي يمر بالنقطتين (−٣ ، −٢) ، (٤ ، ٥) **يوازي** المستقيم الذي يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥°

③ **أثبت أن**: المستقيم الذي يمر بالنقطتين (٤ ، ٢$\sqrt{٣}$) ، (٥ ، ٣$\sqrt{٣}$) **يوازي** المستقيم الذي يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٦٠°

④ **أثبت أن** : المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ حيث أ(٣ ، ١) ، ب(١ ، ٢) **يوازي** المستقيم **ل الذي معادلته** : ٢س + ٤ص − ٣ = ٠

⑤ **أثبت أن** : $ل_١ \parallel ل_٢$ **حيث** $ل_١$: **٢ص − س + ٥ = ٠** ، $ل_٢$: **٢س + ٦ = ٤ص**

⑥ **أثبت أن**: المستقيم المار بالنقطتين (−١ ، ٤) ، (٣ ، ٤) **يكون عموديًا على** المستقيم المار بالنقطتين (−٢ ، −٣) ، (−٢ ، ١)

⑦ **أثبت أن**: المستقيم الذي يمر بالنقطتين (٣ ، ٤) ، (٦ ، ١) **عمودي على** المستقيم الذي يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥°

⑧ **أثبت أن**: المستقيم الذي يمر بالنقطتين (−٣ ، ٢) ، (٤ ، −٥) **عمودي على** المستقيم الذي يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥°

⑨ **أثبت أن** : المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ حيث أ(١ ، ٥) ، ب(٣ ، ٢) **عمودي على** المستقيم **ل الذي معادلته** : ٢س − ٣ص = ١

⑩ **أثبت أن** : $ل_١ \perp ل_٢$ **حيث** $ل_١$: **٢س + ٥ص + ٩ = ٠** ، $ل_٢$: **٢ص − ٥س = ٣**

٤ تمارين إيجاد قيمة :

① **إذا كان**: المستقيمان اللذان ميلاهما $\frac{ك}{٣}$ ، $\frac{-٣}{٥}$ **متوازيان** **أوجد قيمة** : **ك**

② **إذا كان: المستقيم المار بالنقطتين : (ك ، ٥)** ، (٢ ، ٣) يوازي المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٤) ، (٥ ، ٢) **أوجد قيمة** : **ك**

③ **إذا كان المستقيم : أ** س + ٢ص − ٣ = ٠ موازيًا المستقيم المـار بالنقطتين (٢ ،٣) ، (١ ، ٥) **أوجد قيمة** : **أ**

④ **إذا كان المستقيم : أ** س − ٢ص + ٥ = ٠ يوازي المستقيم الذي يصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات **أوجد قيمة** : **أ**

⑤ **إذا كان المستقيمان** : ٤ س + ب ص − ٥ = ٠ ، ٢ س + ص − ٢ = ٠ **متوازيان أوجد** : **ب**

⑥ **إذا كان المستقيمان** : ك س − ٢ ص + ٣ = ٠ ، ٦ س + ٣ص − ٥ = ٠ **متوازيان أوجد** : **ك**

⑦ **إذا كان المستقيمان** : ٢ س − ك ص + ٣ = ٠ ، ٣ س − ص + ٢ = ٠ **متوازيان أوجد** : **ك**

⑧ **إذا كان**: المستقيمان اللذان ميلاهما $\frac{-٤}{٣}$ ، $\frac{ك}{٢}$ **متعامدان** **أوجد قيمة** : **ك**

⑨ **إذا كان:** المستقيم $ل_1$ يمر بالنقطتين (ٮ ، ٠) ، (٠ ، ٣) والمستقيم $ل_2$ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٣٠° **أوجد قيمة** : ٮ إذا كان المستقيمان متعامدان

⑩ **إذا كان المستقيم :** المار بالنقطتين (٥ ، ٢) ، (٦ ، –٣) عموديًا على المستقيم الذي معادلته :

٥ ص – ٮ س + ٣ = ٠ **أوجد قيمة** : ٮ

⑪ **إذا كان المستقيمان :** س + ٢ ص – ٣ = ٠ ، ك س – ٢ ص + ١ = ٠ **متعامدان أوجد** : ك

⑫ **إذا كان المستقيمان :** س + ٣ ص – ٦ = ٠ ، ٮ س – ٣ ص + ٧ = ٠ **متعامدان أوجد** : ٮ

⑬ **إذا كان المستقيمان :** ٣س – ٤ ص – ٣ = ٠ ، ٤ س + ٮ ص – ٨ = ٠ **متعامدان أوجد** : ٮ

⑭ **إذا كان:** المستقيم $ل_1$ يمر بالنقطتين (٣ ، ١) ، (٢ ، ك) والمستقيم $ل_2$ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥° **أوجد: قيمة ك** إذا كان المستقيمان $ل_1$ ، $ل_2$

أولاً : متوازيين ثانيًا : متعامدين

⑮ إذا كانتا معادلتا المستقيمين $ل_1$ ، $ل_2$ على الترتيب هما: س – ٤ص – ٣ = ٠ ، ص = ك س + ٥

فأوجد قيمة ك إذا كان المستقيمان $ل_1$ ، $ل_2$: **(١) متوازيين (٢) متعامدين**

⑯ إذا كانتا معادلتا المستقيمين $ل_1$ ، $ل_2$ على الترتيب هما: ك س – ٢ص + ٤ = ٠ ، س + ٣ص – ٧ = ٠

فأوجد قيمة ك إذا كان المستقيمان $ل_1$ ، $ل_2$: **(١)** $ل_1 // ل_2$ **(٢)** $ل_1 \perp ل_2$

⑰ إذا كانتا معادلتا المستقيمين $ل_1$ ، $ل_2$ على الترتيب هما: ٣س – ٤ص – ٮ = ٠ ، ٢س + ٮ ص = ٦

فأوجد : (١) قيمة ٮ التي تجعل $ل_1 // ل_2$ **(٢) قيمة ٮ التي تجعل** $ل_1 \perp ل_2$

(٣) قيمة ٮ إذا كانت النقطة (١ ، ٤) تقع على المستقيم $ل_2$

٥ تمارين متنوعة :

① **أثبت أن النقط:** ٮ(–١ ، ٤) ، ٮ(–٢ ، ٢) ، حـ(–٣ ، ٠) **تقع على استقامة واحدة .**

② **أثبت أن النقط** : ٮ(–٣ ، –١) ، ٮ(٦ ، ٥) ، حـ(٣ ، ٣) **تقع على استقامة واحدة .**

③ **أثبت أن النقط** : ٮ(٣ ، –١) ، ٮ(–٤ ، ٦) ، حـ(٢ ، –٦) **ليست على استقامة واحدة .**

④ **إذا كانت النقط:** ٮ(٠ ، ٠) ، ٮ(٢ ، ٣)، حـ(٦ ، ك) **تقع على استقامة واحدة أوجد : ك**

⑤ **إذا كانت النقط:** ٮ(–١ ، ٣) ، ٮ(١ ، ٤)، حـ(٣ ، ص) **تقع على استقامة واحدة أوجد : ص**

⑥ **أثبت أن المثلث الذي رؤوسه:** ٢(٠ ، ٠) ، ب(٨ ، ٥) ، حـ(٥ ، ٢) **قائم الزاوية في ب**

⑦ إذا كان المثلث الذي رؤوسه النقط ٢(٠ ، ٠) ، ب(٥ ، ٧) ، حـ(٥ ، هـ)

قائم الزاوية في ب **أوجد قيمة** : هـ

⑧ إذا كان المثلث الذي رؤوسه النقط س(٣ ، ٥) ، ص(٤ ، ٢) ، ع(-٥ ، ٢)

قائم الزاوية في ص **أوجد قيمة** : ٢

⑨ إذا كان المثلث الذي رؤوسه النقط س(١ ، ٤) ، ص(-١ ، -٢) ، ع(٢ ، ٢)

قائم الزاوية في ص **أوجد قيمة** : ٢

---

٥ تمارين الأشكال الرباعية :

① **أثبت أن النقط:** ٢(٢ ، ٣) ، ب(٦ ، ٢) ، حـ(-٢ ، -٢) ، ء(-٢ ، ١) **هي رؤوس شبه منحرف**

② **أثبت أن النقط:** ٢(-٣ ، -٣) ، ب(٣ ، ١) ، حـ(١ ، ٥) ، ء(-٢ ، ٣) **هي رؤوس شبه منحرف**

③ ٢ ب حـ ء شبه منحرف فيه $\overline{٢ب} // \overline{ءحـ}$ ، ٢(٩ ، -٢) ، ب(٣ ، ٢) ، حـ(س ، -س)

، ء(٤ ، -٣) **أوجد: إحداثيي نقطة حـ**

④ **أثبت أن النقط:** ٢(-١ ، ١) ، ب(٠ ، ٥) ، حـ(٤ ، ٢) ، ء(٥ ، ٦) **هي رؤوس متوازي أضلاع**

⑤ **أثبت أن النقط:** ٢(-١ ، ٣) ، ب(٥ ، ١) ، حـ(٧ ، ٤) ، ء(١ ، ٦) **هي رؤوس متوازي أضلاع**

⑥ ٢ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه: ٢(س ، ٢) ، ب(٣ ، ٨) ، حـ(٩ ، ١٠) ، ء(٧ ، ٤)

أوجد قيمة : س

⑦ **أثبت باستخدام الميل أن النقط:** ٢(٢ ، -٢) ، ب(٨ ، ٤) ، حـ(٥ ، ٧) ، ء(-١ ، ١)

هي رؤوس مستطيل.

⑧ **أثبت أن النقط:** ٢(١ ، ٣) ، ب(٦ ، ٤) ، حـ(٧ ، ٩) ، ء(٢ ، ٨) **هي رؤوس معين.**

⑨ **أثبت أن النقط:** ٢(-١ ، -١) ، ب(٢ ، ٣) ، حـ(٦ ، ٠) ، ء(٣ ، -٤) **هي رؤوس مربع.**

⑩ **٢ ب حـ ء مربع فيه :** ٢(٥ ، ٣) ، حـ(-١ ، ١) **أوجد :**

(١) إحداثي نقطة تقاطع قطري المربع **(٢) ميل $\overleftrightarrow{٢حـ}$ واستنتج ميل $\overleftrightarrow{بء}$**

تكوين معادلة الخط المستقيم

أولاً : إذا كان معادلة الخط المستقيم على الصورة:

ص = م س + حـ

فـإن :

❁ طول الجزء المقطوع من محور الصادات

= |حـ|

، والمستقيم يمر بالنقطة (٠ ، حـ)

ثانياً : إذا كان معادلة الخط المستقيم على الصورة:

أ س + ب ص + حـ = ٠

فـإن :

❁ طول الجزء المقطوع من محور الصادات

$= \left|\frac{-\text{الحد المطلق}}{\text{معامل ص}}\right| = \left|\frac{-\text{حـ}}{\text{ب}}\right|$

، والمستقيم يمر بالنقطة $\left(\text{٠} ، \frac{-\text{حـ}}{\text{ب}}\right)$

مثال ١ : أوجد طول الجزء المقطوع من محور الصادات :

(١) ص = ٤ س − ٣ (الحل) طول الجزء المقطوع من محور ص = ٣	(٢) ص = س + ٥ (الحل) طول الجزء المقطوع من محور ص = ٥
(٣) ٢ ص = ٦ س − ٨ (÷٢) (الحل) ∵ المعادلة: ص = ٣ س − ٤ ∴ طول الجزء المقطوع من محور ص = ٤	(٤) ٣ ص = ٢ س − ٥ (÷٣) (الحل) ∵ المعادلة: ص = $\frac{\text{٢}}{\text{٣}}$ س − $\frac{\text{٥}}{\text{٣}}$ ∴ طول الجزء المقطوع من محور ص = $\frac{\text{٥}}{\text{٣}}$
(٥)(٦) ص = $\frac{\text{س+٢}}{\text{٣}}$ (الحل) ∵ المعادلة: ص = $\frac{\text{١}}{\text{٣}}$ س + $\frac{\text{٢}}{\text{٣}}$ ، طول الجزء المقطوع من محور ص = $\frac{\text{٢}}{\text{٣}}$	(٧) ٢ س + ٣ ص − ٦ = ٠ (الحل) ∴ طول الجزء المقطوع من محور ص = $\frac{\text{٦}}{\text{٣}}$ = ٢
(٥) ٢ س + ص = ٤ (الحل) ∵ المعادلة: ٢ س + ص − ٤ = ٠ ∴ طول الجزء المقطوع من محور ص = ٤	(٨) ٣ س − ٤ ص = ١٢ (الحل) ∵ المعادلة: ٣ س − ٤ ص − ١٢ = ٠ ∴ طول الجزء المقطوع من محور ص = $\frac{\text{١٢}}{\text{٤}}$ = ٣

ملاحظـــات هامة : ⇩

❶ لإيجاد الجزء المقطوع من محور الصادات في أي معادلة **نضع س = صفر**

❷ لإيجاد الجزء المقطوع من محور السينات في أي معادلة **نضع ص = صفر**

لتكوين معادلة الخط يجب معرفة : ⇩

❶ الميل = م ❷ الجزء المقطوع من محور الصادات = حـ

✵ **وتكون المعادلة على الصورة** : **ص = م س + حـ**

مثال ١ : **أوجد معادلة المستقيم إذا كان :**

(١) م = ١ ، حـ = - ٢	(٢) م = - ٢ ، حـ = ١
(الحل) المعادلة هي : ص = س - ٢	(الحل) المعادلة هي : ص = - ٢ س + ١

مثال ٢ : **أوجد معادلة المستقيم :**

(١) الذي **ميله** = ٢ ويقطع جزءًا **موجبًا** من محور الصادات مقداره ٧ وحدات	(٢) الذي **ميله** = $\frac{١}{٢}$ ويقطع جزءًا **سالبًا** من محور الصادات مقداره وحدتان طول
(الحل) ∵ م = ٢ ، حـ = ٧	(الحل) ∵ م = $\frac{١}{٢}$ ، حـ = - ٢
∴ المعادلة هي : ص = ٢ س + ٧	∴ المعادلة هي : ص = $\frac{١}{٢}$ س - ٢

مثال ٣ : **أوجد معادلة المستقيم ونقطة تقاطعه مع محور السينات :**

الذي **ميله** = ٢ ويقطع جزءًا **سالبًا** من محور الصادات مقداره ٧ وحدات طول

الحل ∵ م = ٢ ، حـ = - ٧ ∴ المعادلة هي : **ص = ٢ س - ٧**

لإيجاد نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات نضع ص = ٠

∴ ٢ س - ٧ = ٠ ⟸ س = $\frac{٧}{٢}$ ∴ النقطة هي : ($\frac{٧}{٢}$ ، ٠)

ملاحظـــات هامة : ⇩

❶ معادلة المستقيم الذي يمر بنقطة الأصل و(٠ ، ٠) هي **ص = م س** حيث م ميل المستقيم

❷ معادلة المستقيم الذي يوازي محور **السينات** ويمر بنقطة الأصل و(٠ ، ب) هي **ص = ب**

❸ معادلة المستقيم الذي يوازي محور **الصادات** ويمر بنقطة الأصل و(ا ، ٠) هي **س = ا**

❹ معادلة **محور السينات** هي **ص = ٠** ❺ معادلة **محور الصادات** هي **س = ٠**

مثال ٤ : **أكمل ما يأتي :**

① معادلة المستقيم الذي ميله يساوي ٢ ويمر بنقطة الأصل هي ....

(الحل) ∴ **المعادلة هي :** **ص = ٢ س**

② معادلة المستقيم الذي يمر بنقطة الأصل ويصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥° هي ....

(الحل) ∵ م = طا هـ = طا ٤٥° = ١ ∴ **المعادلة هي :** **ص = س**

③ معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، −٥) ويوازي محور السينات هي ....

(الحل) ∴ **المعادلة هي :** **ص = − ٥**

④ معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (٣ ، −٥) ويوازي محور الصادات هي ....

(الحل) ∴ **المعادلة هي :** **س = ٣**

⑤ معادلة المستقيم الذي ميله يساوي ٣ ويمر بالنقطة (٠ ، ٥) هي ....

(الحل) ∵ م = ٣ ، حـ = ٥ ∴ **المعادلة هي :** **ص = ٣ س + ٥**

مثال ٥ : **أوجد معادلة المستقيم** مارًا بالنقطتين (٢ ، ٣) ، (٤ ، ١) ويقطع من محور الصادات جزءاً **موجباً** طوله ٣ وحدة طول

(الحل) ∵ م = ؟؟ ، حـ = ٣

∵ م = $\frac{٣ - ١}{٢ - ٤}$ = − ١

∵ **المعادلة على الصورة: ص = م س + حـ**

∴ **المعادلة هي :** **ص = − س + ٣**

مثال ٦ : **أوجد معادلة المستقيم** الذي يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها ٤٥° ويقطع من محور الصادات جزءاً **موجباً** طوله وحدتان طول

(الحل) ∵ م = ؟؟ ، حـ = ٢

∵ م = طا هـ = طا ٤٥° = ١

∵ **المعادلة على الصورة: ص = م س + حـ**

∴ **المعادلة هي :** **ص = س + ٢**

مثال ٧ : **أوجد معادلة المستقيم يوازي** المستقيم الذي يمر بالنقطتين (١ ، ٦) ، (−٣ ، ٤) ويقطع من محور الصادات جزءاً **سالباً** طوله ٥ وحدة طول

(الحل) ∵ م = ؟؟ ، حـ = −٥

مثال ٨ : **أوجد معادلة المستقيم العمودي** على المستقيم ٣س + ص − ٧ = ٠ ، ويمر بالنقطة (٠ ، ٦)

(الحل)

∵المستقيم يمر بالنقطة (٠ ، ٦) ∴ حـ = ٦

∵ الميل $= \frac{6-4}{1+3} = \frac{1}{2}$

فإن: ميل المستقيم الموازي له $= \frac{1}{2}$

∵ المعادلة على الصورة: ص = م س + حـ

∴ المعادلة هي : **ص = $\frac{1}{2}$ س − ٥**

∵ الميل $= \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-3}{1} = -3$

فإن: ميل المستقيم العمودي عليه $= \frac{1}{3}$

∵ المعادلة على الصورة: ص = م س + حـ

∴ المعادلة هي : **ص = $\frac{1}{3}$ س + ٦**

مثال ٩ : أوجد معادلة المستقيم الذي ميله $= \frac{1}{2}$ ويمر بالنقطة (٢ ، ٣)

(الحل)

∵ المعادلة على الصورة: ص = م س + حـ

م $= \frac{1}{2}$
س = ٢
ص = ٣

∴ $\frac{1}{2}$ × ٢ + حـ = ٣

١ + حـ = ٣

حـ = ٣ − ١

∴ **حـ = ٢**

∴ المعادلة هي : **ص = س + ٢**

مثال ١٠ : أوجد معادلة المستقيم الذي يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها $45°$ ويمر بالنقطة (٣ ، ٤)

(الحل) ∵ الميل (م) = طا هـ = طا $45°$ = **١**

∵ المعادلة على الصورة: ص = م س + حـ

م = ١
س = ٣
ص = ٤

∴ ١ × ٣ + حـ = ٤

٣ + حـ = ٤

حـ = ٤ − ٣

∴ **حـ = ١**

∴ المعادلة هي : **ص = س + ١**

مثال ١١ : أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، −٥) ويوازي المستقيم:

س + ٢ ص − ٧ = ٠

(الحل)

∵ الميل $= \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = -\frac{1}{2}$

فإن: ميل المستقيم الموازي له $= -\frac{1}{2}$

∵ المعادلة على الصورة: ص = م س + حـ

م $= \frac{1}{2}$
س = ٣
ص = −٥

∴ $-\frac{1}{2}$ × ٣ + حـ = −٥

$-\frac{3}{2}$ + حـ = −٥

حـ = −٥ + $\frac{3}{2}$

∴ **حـ = $-\frac{7}{2}$**

∴ المعادلة هي : **ص = $-\frac{1}{2}$ س − $\frac{7}{2}$**

مثال ١٢ : أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (−٣ ، ١) وعمودي على المستقيم:

ص = $\frac{1}{2}$ س − ٥

(الحل)

∵ الميل = معامل س $= \frac{1}{2}$

فإن: ميل المستقيم العمودي عليه = **−٢**

∵ المعادلة على الصورة: ص = م س + حـ

م = −٢
س = −٣
ص = ١

∴ −٢ × −٣ + حـ = ١

٦ + حـ = ١

حـ = ١ − ٦

∴ **حـ = −٥**

∴ المعادلة هي : **ص = −٢ س − ٥**

مثال ١٣ : **أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (-١ ، ٢) ، (٣ ، ٤)**

(الحل)

∵ الميل (م) = $\frac{٢-٤}{-١-٣}$ = $\boxed{\frac{١}{٢}}$

∵ المعادلة على الصورة: ص = م س + حـ

م = $\frac{١}{٢}$
س = ٣
ص = ٤

∴ $\frac{١}{٢}$ × ٣ + حـ = ٤

$\frac{٣}{٢}$ + حـ = ٤

حـ = ٤ - $\frac{٣}{٢}$

∴ $\boxed{حـ = \frac{٥}{٢}}$

∴ المعادلة هي : $\boxed{ص = \frac{١}{٢} س + \frac{٥}{٢}}$

مثال ١٤ : إذا كان: أ(٥ ، -٦) ، ب(٣ ، ٧) ، حـ(١ ، -٣) **أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة أ وبنقطة منتصف $\overline{بحـ}$**

(الحل)

نقطة منتصف $\overline{بحـ}$ = ($\frac{٣+١}{٢}$ ، $\frac{٧-٣}{٢}$) = (٢ ، ٢)

∴ المستقيم يمر بالنقطتين (٥ ، -٦) ، (٢ ، ٢)

∴ الميل (م) = $\frac{-٦-٢}{٥-٢}$ = $\boxed{\frac{-٨}{٣}}$

∵ المعادلة على الصورة: ص = م س + حـ

م = - $\frac{٨}{٣}$
س = ٢
ص = ٢

∴ - $\frac{٨}{٣}$ × ٢ + حـ = ٢

حـ = ٢ + $\frac{١٦}{٣}$

∴ $\boxed{حـ = \frac{٢٢}{٣}}$

∴ المعادلة هي : $\boxed{ص = - \frac{٨}{٣} س + \frac{٢٢}{٣}}$

مثال ١٥ : **أوجد معادلة محور التماثل** $\overline{أب}$ حيث: أ(-٤ ، ١) ، ب(-٢ ، ٣)

(الحل)

نقطة منتصف $\overline{أب}$ = ($\frac{-٤-٢}{٢}$ ، $\frac{١+٣}{٢}$) = (-٣ ، ٢)

∵ الميل = $\frac{١-٣}{-٤+٢}$ = ١

فإن: ميل المستقيم العمودي عليه = $\boxed{-١}$

∵ المعادلة على الصورة: ص = م س + حـ

م = -١
س = -٣
ص = ٢

∴ -١ × -٣ + حـ = ٤

٣ + حـ = ٤

حـ = ٤ - ٣

∴ $\boxed{حـ = ١}$

∴ المعادلة هي : $\boxed{ص = - س + ١}$

مثال ١٦ : **أوجد معادلة المستقيم** الذي يقطع من محوري الإحداثيات السيني والصادي جزأين موجبين طولهما ٣ ، ٦ على الترتيب **ثم أوجد مساحة المحصورة بين المستقيم ومحوري الإحداثيات**

(الحل)

∵ المستقيم يمر بالنقطتين (٣ ، ٠) ، (٠ ، ٦)

∴ الميل (م) = $\frac{٠-٦}{٣-٠}$ = $\boxed{-٢}$ ، $\boxed{حـ = ٦}$

∵ المعادلة على الصورة: ص = م س + حـ

∴ المعادلة هي : $\boxed{ص = - ٢ س + ٦}$

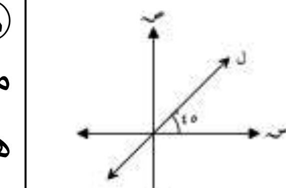
∴ **مساحة المثلث** = $\frac{١}{٢}$ × ٣ × ٦

= ٩ وحدة مربعة

تمارين (٨)

١ اختر الإجابة الصحيحة :

الأسئلة	اختر
① المستقيم الذي معادلته **ص = ٢ - ٣ س** يقطع من محور الصادات جزءًا طولـه يساوي .... وحدة طول	[$\frac{٣}{٢}$ ، ١ ، ٢ ، ٣]
② المستقيم الذي معادلته **٢ص = ٣س + ٦** يقطع من محور الصادات جزءًا طولـه يساوي .... وحدة طول	[$\frac{٣}{٢}$ ، ٢ ، ٣ ، ٦]
③ المستقيم الذي معادلته **ص - ٢س - ٥ = ٠** يقطع من محور الصادات جزءًا طولـه يساوي .... وحدة طول	[٢ ، ٥ ، ٧ ، ١٠]
④ المستقيم الذي معادلته **٢ س - ٣ص - ٦ = ٠** يقطع من محور الصادات جزءًا طولـه يساوي .... وحدة طول	[٦ ، -٢ ، $\frac{٢}{٣}$ ، ٢]
⑤ المستقيم الذي معادلته **٢ س + ٥ص - ١٠ = ٠** يقطع من محور الصادات جزءًا طولـه يساوي .... وحدة طول	[$\frac{٢}{٥}$ ، ٢ ، $\frac{٥}{٢}$ ، ٥]
⑥ معادلة المستقيم الذي ميله يساوي واحد ويمر بنقطة الأصل هي	[س = ١ ، ص = ١ ، ص = س ، ص = - س]
⑦ معادلة المستقيم الذي يمر بنقطة الأصل ويصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ١٣٥° هي	[س = ١ ، ص = ١ ، ص = س ، ص = - س]
⑧ معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، -٣) ويوازي محور السينات هي	[س = ٢ ، ص = ٢ ، س = - ٣ ، ص = - ٣]
⑨ معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ٥) ويوازي محور الصادات هي	[س = ٢ ، ص = ٢ ، س = ٥ ، ص = ٥]
⑩ معادلة المستقيم الذي ميله يساوي ٢ ويمر بالنقطة (٠ ، ٣) هي	[ص = ٢ س ، ص = ٣ - ٢ س ، ص = ٣ س ، ص = ٢ س + ٣]
⑪ معادلة المستقيم الذي معادلته ص=س يمر بالنقطة	[(١ ، ٠) ، (١ ، ٢) ، (٠،٠) ، (٠ ، ١)]
⑫ **إذا كان المستقيم:** ٢ س + ص + م = ٠ يمر بنقطة الأصل **فإن: م =**.........	[١ ، ٢ ، ٣ ، ٠]
⑬ **إذا كان المستقيم:** ص = ٢ س + حـ يمر بالنقطة (٢،٢) **فإن: حـ =**.........	[٠ ، -٢ ، ٢ ، ٤]
⑭ **إذا كانت النقطة : (٠ ، م)** تنتمي للمستقيم ٣ س - ٤ ص + ١٢ = ٠ **فإن: م =**.........	[٣ ، -٣ ، ٤ ، ١٢]

⑮ **إذا كان المستقيم :** ص = س **حا** ٣٠° + حـ يمر بالنقطة (٤ ، ٦) **فإن: حـ =**.........	 [٦ ، ٣ ، ٢ ، ١]
⑯ مساحة المثلث بالوحدات المربعة المحددة بالمستقيمات ٣ س – ٤ ص = ١٢ ، س = ٠ ، ص = ٠ **تساوي**	[٦ ، –٢ ، ١٢ ، –١٢]
⑰ **من الشكل المقابل :**  معادلة المستقيم ل هي ..... [س = ١ ، ص = ١ ، ص = س ، ص = – س]	⑱ **من الشكل المقابل :** معادلة المستقيم ل هي ..... [ص = س + ٢ ، ص = – س + ٢ ، ص = ٢س + ٢ ، ص = –٢س + ٢]
⑲ **من الشكل المقابل :**  معادلة المستقيم ل هي ..... [ص = ٢س + ٣ ، ٢س + ٣ص = ٠ ، $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٣} = ١$ ، $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٣} = ٥$]	⑳ **في الشكل المقابل :**  **إذا كانت مساحة Δ أ و ب تساوي ٩ وحدة مربعة فإن معادلة $\overleftrightarrow{أب}$ هي .....** [ص = س + ٢ ، ص = – س + ٢ ، ص = ٢س + ٢ ، ص = –٢س + ٢]

٢ أوجد الميل وطول الجزء المقطوع من محور الصادات لكل من المعادلات الآتية :



① ٣س + ٤ص – ٨ = ٠	② ص – ٢س – ٣ = ٠
③ $\frac{س}{٢}$ + ٣ص = ٦	④ $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٣} = ١$

٣ تمارين على إيجاد معادلة الخط المستقيم :

① **أوجد معادلة المستقيم** الذي ميله = ٥ ويقطع جزءًا سالبًا من محور الصادات مقداره ٧ وحدات	② **أوجد معادلة المستقيم** الذي ميله = $\frac{٢}{٥}$ ويقطع جزءًا موجبًا من محور الصادات طوله ٣ وحدات

③ مستقيم ميله = ٢ ويقطع جزءًا سالبًا من محور الصادات طوله ٣ وحدات **أوجد :**

أولا : **معادلة المستقيم**   **ثانيًا** : **نقطة تقاطعه مع محور السينات**

④ مستقيم ميله = $\frac{١}{٢}$ ويقطع جزءًا موجبًا من محور الصادات طوله وحدتان **أوجد :**

أولا : **معادلة المستقيم**   **ثانيًا** : **نقطة تقاطعه مع محور السينات**

⑤ مستقيم ميله = − $\frac{٣}{٤}$ ويقطع جزءًا موجبًا من محور الصادات طوله ٤ وحدات **أوجد :** **أولا : معادلة المستقيم ثانيًا : نقطة تقاطعه مع محور السينات**
⑥ مستقيم ميله = ٢ ويقطع جزءًا موجبًا من محور الصادات طوله وحدة واحدة **أوجد :** **أولا : معادلة المستقيم ثانيًا : ارسم هذا المستقيم مبينا نقط تقاطعه مع محوري الإحداثيات**
⑦ **أوجد معادلة المستقيم** الذي يقطع من محور الصادات جزءًا موجبًا طوله ٧ وحدات ويوازي المستقيم المار بالنقطتين: (٣ ، ١) ، (١ ، ٥)
⑧ **أوجد معادلة المستقيم** الذي يقطع من محور الصادات جزءًا سالبًا طوله ٣ وحدات ويوازي المستقيم: ٢ س − ٣ ص = ٦
⑨ **أوجد معادلة المستقيم** الذي يقطع محور الصادات في النقطة (٠ ، ٢) ويوازي المستقيم: ٥ س + ٣ ص + ١ = ٠
⑩ **أوجد معادلة المستقيم** المار بالنقطة (٠ ، ٥) ويوازي الخط المستقيم المار بالنقطتين: أ(− ٢ ، ١) ، ب(١ ، ٧)
⑪ **أوجد معادلة المستقيم** الذي يقطع من محور الصادات جزءًا موجبًا طوله ٥ وحدات وعمودي على المستقيم المار بالنقطتين: (− ٢ ، ١) ، (٢ ، ٧)
⑫ **أوجد معادلة المستقيم** الذي يقطع من محور الصادات جزءًا موجبًا طوله ٧ وحدات ويكون عمودياً على المستقيم الذي معادلته : س = ٣ ص
⑬ **أوجد معادلة المستقيم** الذي يقطع من محور الصادات جزءًا موجبًا طوله ٤ وحدات ويكون عمودياً على المستقيم الذي معادلته : ٣ س − ٤ ص + ١ = ٠
⑭ **أوجد معادلة المستقيم** الذي يقطع محور الصادات في النقطة (٠ ، ٣) ويكون عمودياً على المستقيم الذي معادلته : ٢ س + ٣ ص = ٥

٤ تمارين على إيجاد معادلة الخط المستقيم :

① **أوجد معادلة المستقيم** الذي ميله ١ ويمر بالنقطة (٣ ، ٢)
② **أوجد معادلة المستقيم** الذي ميله $\frac{٢}{٣}$ ويمر بالنقطة (− ٣ ، ٧)
③ **أوجد معادلة المستقيم** المار بالنقطة (٣ ، ٢) ويصنع مع الإتجاه الموجب لمحور السينات بزاوية قياسها ٤٥°
④ **أوجد معادلة المستقيم** المار بالنقطة ($\sqrt{٣}$ ، − ٢) ويصنع مع الإتجاه الموجب لمحور السينات بزاوية قياسها ٦٠°

⑤ **أوجد معادلة المستقيم** المار بالنقطة (١ ، ٦) **ويوازي** المستقيم الذي يصنع مع الإتجاه الموجب لمحور السينات بزاوية قياسها ٥٤٥

⑥ **أوجد معادلة المستقيم** المار بالنقطة (٣ ، –٥) **ويوازي** المستقيم: ص = ٢ س – ٣

⑦ **أوجد معادلة المستقيم** المار بالنقطة (– ٢ ، ٣) **ويوازي** المستقيم: س – ص = ٧

⑧ **أوجد معادلة المستقيم** المار بالنقطة (٢ ، ٣) **ويوازي** المستقيم: س – ٢ص + ٩ = ٠

⑨ **أوجد معادلة المستقيم** المار بالنقطة (١ ، ٢) **ويوازي** المستقيم: ٢س + ص – ٦ = ٠

⑩ **أوجد معادلة المستقيم** المار بالنقطة (١ ، ٢) **ويوازي** الخط المستقيم المار بالنقطتين: (٢ ، – ١) ، (٥ ، – ٤)

⑪ **أوجد معادلة المستقيم** المار بالنقطة (٣ ، – ٤) **ويوازي** الخط المستقيم المار بالنقطتين: (– ١ ، ٧) ، (٥ ، ٣)

⑫ **أوجد معادلة المستقيم** المار بمنتصف القطعة المستقيمة المرسومة بين النقطتين (٣ ، ٦) ، (– ١ ، ٤) **ويوازي** المستقيم الذي معادلته: ٢ ص = ٤ س – ٥

---

⑬ **أوجد معادلة المستقيم** المار بالنقطة (١ ، ٢) **وعمودي على** المستقيم الذي ميله = – $\frac{١}{٣}$

⑭ **أوجد معادلة المستقيم** المار بالنقطة (٥ ، ١) **وعمودي على** المستقيم الذي يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٥٤٥

⑮ **أوجد معادلة المستقيم** المار بالنقطة (٢ ، –٣) **وعموديًا على** المستقيم: ص = ٣ س + ٢

⑯ **أوجد معادلة المستقيم** المار بالنقطة (٢ ، – ١) **وعموديًا على** المستقيم: ٣ س + ٢ ص = ٥

⑰ **أوجد معادلة المستقيم** المار بالنقطة (٣ ، ٤) وعموديًا على المستقيم: ٥ س – ٢ ص + ٧ = ٠

⑱ **أوجد معادلة المستقيم** المار بالنقطة (١ ، ٣) وعموديًا على المستقيم المار بالنقطتين: ﺃ(–٣ ، ٤) ، ب(٣ ، –٢)

⑲ **أوجد معادلة المستقيم** المار بالنقطة (– ٢ ، ٣) وعموديًا على المستقيم المار بالنقطتين: ﺃ (٣ ، – ١) ، ب (–٧ ، ٤)

⑳ **أوجد معادلة المستقيم** العمودي على $\overline{ﺃب}$ من نقطة ﺃ حيث : ﺃ(٣ ، – ١) ، ب(– ٧ ، ٤)

㉑ **أوجد معادلة المستقيم** يمر بمنتصف $\overline{ﺃب}$ حيث ﺃ(٣ ، ٦) ، ب(– ١ ، ٤) وعموديـاً على المستقيم الذي معادلته: ٢ ص – ٤ س + ١١ = ٠

٥ تمارين على إيجاد معادلة الخط المستقيم :

① **أوجد معادلة المستقيم** المار بالنقطتين: (٧ ، ٣) ، (٥ ، ١)
② **أوجد معادلة المستقيم** المار بالنقطتين: (٢ ، ٣) ، (−٣ ، ٢)
③ **أوجد معادلة المستقيم** المار بالنقطتين: (١ ، −١) ، (٢ ، ٢)
④ **أوجد معادلة المستقيم** المار بالنقطتين: (٢ ، −١) ، (١ ، ١)
⑤ **أوجد معادلة المستقيم** المار بالنقطتين: (٤ ، ٢) ، (−٢ ، −١) **ثم أثبت أنه يمر بنقطة الأصل**
⑥ **أوجد معادلة المستقيم** الذي يقطع من محوري الإحداثيات السيني والصادي جزئيين موجبين طولهما ٣ وحدة طول ، ٤ وحدة طول على الترتيب
⑦ **أوجد معادلة المستقيم** الذي يقطع من محوري الإحداثيات السيني والصادي جزئيين موجبين طولهما ٤ وحدة طول ، ٩ وحدة طول على الترتيب
⑧ **أوجد معادلة المستقيم** الذي يمر بالنقطة (١ ، ٦) وبنقطة منتصف $\overline{أب}$ حيث: أ(١ ، −٢) ، ب(٣ ، −٤)
⑨ **أوجد معادلة المستقيم** الذي يمر بالنقطة (٢ ، ٣) وبنقطة منتصف $\overline{أب}$ حيث: أ(−٣ ، ٤) ، ب(−٣ ، −٢)
⑩ **إذا كانت:** أ(−٣ ، ٤) ، ب(٥ ، −١) ، حـ(٣ ، ٥) **أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة أ وبنقطة منتصف** $\overline{بحـ}$
⑪ **إذا كانت:** أ(−٢ ، ٣) ، ب(٠ ، ٥) ، حـ منتصف $\overline{أب}$ **أوجد معادلة المستقيم العمودي على** $\overleftrightarrow{أب}$ **ومارًا بالنقطة حـ**

٦ تمارين متنوعة :

① **أوجد معادلة محور التماثل** $\overline{أب}$ حيث: أ(١ ، ٣) ، ب(٣ ، ٥)
② أ ب حـ مثلث فيه : أ(٠ ، ٦) ، ب(٥ ، −١) ، حـ(−٢ ، ١) **أوجد معادلة المستقيم** المار بالنقطة أ وعموديا على $\overline{بحـ}$
③ أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في ب حيث: أ(١ ، ٤) ، ب(−١ ، −٢) **أوجد معادلة المستقيم** $\overleftrightarrow{بحـ}$

④ ٩ ب حـ مثلث فيه : ٩(١ ، ٢) ، ب(٥ ، −٢) ، حـ(٣ ، ٤) ، ء منتصف $\overline{٩ب}$

، ورسم $\overline{ءهـ}$ // $\overleftrightarrow{بحـ}$ ويقطع $\overline{٩حـ}$ في هـ **أوجد :**

(١) طول $\overline{ءهـ}$ **(٢) معادلة المستقيم** ءهـ

⑤ ٩ ب حـ ء **مربع** فيه : ٩(٥ ، ٤) ، حـ(−١ ، ٦) **فأوجد معادلة المستقيم**: $\overleftrightarrow{بء}$

⑥ ٩ ب حـ ء **معين** ، م نقطة تقاطع قطريه حيث : ٩(١ ، ٣) ، حـ(٦ ، ٠)

أوجد معادلة المستقيم: المار بالنقطتين ب ، ء

⑦ $\overline{٩ب}$ قطر في دائرة مركزها م إذا كانت : ب(٢ ، ٣) ، م(٥ ، ٧) **أوجد :**

(١) إحداثيي النقطة ٩ **(٢) معادلة المستقيم** العمودي على $\overline{٩ب}$ عند النقطة ب

⑧ **أوجد معادلة المستقيم** المار بالنقطتين ٩(٢ ، ٣) ، ب(−١ ، −٣) ، ثم بين أنه

لأي نقطة حـ(٢ك + ١ ، ٤ك + ١) **فإن** حـ $\in$ $\overleftrightarrow{٩ب}$

⑨ إذا كانت النقط : ٩(٦ ، −١) ، ب(م ، ٠) ، حـ(−٤ ، ٤) على استقامة واحدة

أوجد : (١) قيمة م **(٢) معادلة المستقيم** $\overleftrightarrow{٩ب}$

⑩ إذا كانت النقطة (١ ، ٣) تقع على المستقيم ٢س − ٣ص + ٩ = ٠

أوجد : (١) قيمة ٩ (٢) ميل المستقيم

⑪ إذا كانت النقطة (٩ ، ٩) تنتمي إلى المستقيم ٣س − ٤ص = ١٢ **أوجد :** قيمة ٩

⑫ إذا كانت ص = س **حا** هـ يمر بالنقطة (٤ ، ٢) **أوجد : ق(∠ هـ)** حيث ٠° < هـ < ٩٠°

⑬ إذا كان المستقيم ل: ٢س − ٣ص − ٦ = ٠ يقطع محور السينات عند النقطة ٩ ومحور الصادات عند النقطة ب **أوجد :** (١) إحداثي النقطتين ٩ ، ب

(٢) معادلة المستقيم المار بنقطة منتصف $\overline{٩ب}$ ويوازي محور الصادات

⑭ **الجدول الآتي يمثل علاقة خطية :**

س	١	٢	٣
ص = د(س)	١	٣	٩

(١) أوجد معادلة المستقيم (٢) أوجد قيمة ٩

٧ التمارين المرسومة :

① **من الشكل المقابل :**

أوجد:

(١) ميل $\overleftrightarrow{اب}$

(٢) طول الجزء المقطوع من محور الصادات

(٣) معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{اب}$

② **في الشكل المقابل :**

ح منتصف $\overline{اب}$ حيث

ح(٤ ، ٣) **أوجد:**

(١) إحداثيي كل من النقطتين ا ، ب

(٢) معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{اب}$ **(٣)** ميل $\overleftrightarrow{حو}$

③ **من الشكل المقابل :**

$\overleftrightarrow{اب}$ يقطع من محور الصادي جزءاً طوله ٤ وحدات طول

، ا ب = **٥ وحدات طول**

أوجد:

معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{اب}$

④ **في الشكل المقابل :**

$\overleftrightarrow{اب}$ يمر بالنقطتين ح(٣ ، ١) ، ء(٤ ، ٣) ويقطع محوري الإحداثيات على الترتيب

أوجد:(١) معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{حء}$

(٢) طول كل من: $\overline{او}$ ، $\overline{وب}$ حيث و نقطة الأصل

⑤ **في الشكل المقابل :**

$\overleftrightarrow{اب}$ يقطع محور الصادات في النقطة ا(٠ ، ٨)

ويقطع محور السينات في النقطة ب

فإذا كان ظا(∠ ا ب و) = $\frac{٤}{٣}$ **أوجد:**

(١) ق(∠ ا ب و) **(٢)** إحداثي النقطة ب

(٣) ميل $\overleftrightarrow{اب}$ **(٤)** معادلة المستقيم المار بالنقطة و ، وعموديًا على $\overleftrightarrow{اب}$

⑥ **في الشكل المقابل :**

نظام إحداثي متعامد ، ونقطة الأصل

، ا و ب ح مربع

، م نقطة تقاطع قطريه حيث م(٢ ، ٢)

أوجد:

(١) إحداثيي كل من النقطتين ا ، ب

(٢) معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{اب}$

⑦ **في الشكل المقابل :**

و هي نقطة الأصل

، ا ، ب ، ء ∋ محور السينات

، ميل $\overleftrightarrow{بح}$ = ٣

، **معادلة** $\overleftrightarrow{اح}$

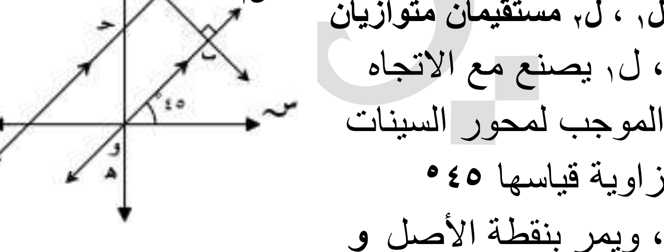
هي: س – ص = ٣

أوجد:

(١) ميل $\overleftrightarrow{اب}$ ، طول $\overline{وه}$

(٢) ق(∠ ح ب ء) ، ق(∠ ح ا ء) ، ق(∠ ا ح ب)

⑧ **في الشكل المقابل :**



ل١ ، ل٢ مستقيمان متوازيان

، ل١ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥°

، ويمر بنقطة الأصل و

، ا ∋ ل٢ حيث ا(١ ، ٥)

، ل٢ يقطع محور الصادات في النقطة ح

أوجد: **(١)** معادلة المستقيم ل١

(٢) معادلة المستقيم ل٢ **(٣)** طول $\overline{اب}$

امتحان هندسة وحساب مثلثات

—— / ١٥

١ ⇐ **اختر الإجابة الصحيحة :**

① ٤ حتا ٦٠° طا ٦٠° = ... [٣ ، ٦ ، ٢$\sqrt{٣}$ ، ١٢]

② طول القطعة المستقيمة بين النقطتين (٠ ، ٣) ، (-٤ ، ٠) = ... وحدة طول
[٣ ، ٤ ، $\sqrt{٧}$ ، ٥]

③ إذا كانت : حا(س + ١٠) = $\frac{١}{٢}$ حيث س قياس زاوية حادة **فإن:** س =..........
[٦٠° ، ٣٠° ، ٢٠° ، ٥٠°]

④ إذا كان المستقيمان : س + ص = ٥ ، ٢ص + ك س = ٧ متعامدين **فإن:** ك = ...
[-٢ ، -١ ، ١ ، ٢]

⑤ المستقيم الذي معادلته : ٣ص = ٢س - ٦ يقطع من محور الصادات جزءًا طوله .... وحدة طول
[-٦ ، ٢ ، $\frac{٢}{٣}$ ، ٦]

⑥ إذا كان: $\overline{أب}$ قطر في الدائرة حيث أ(٣ ، -٥) ، ب(٥ ، ١) **فإن إحداثيي مركز الدائرة هو** ....
[(٤ ، -٢) ، (٤ ، ٢) ، (٢ ، ٢) ، (٨ ، -٢)]

---

٢ ⇐ (أ) **بدون استخدام الآلة الحاسبة أثبت أن :** حا٢ ٣٠° = ٥ حتا٢ ٦٠° - طا٢ ٤٥°

(ب) **أثبت أن :** المثلث الذي رؤوسه أ(١ ، ٤) ، ب(-١ ، -٢) ، حـ(٢ ، -٣) قائم الزاوية في ب
وأوجد مساحة سطحه

---

٣ ⇐ (أ) أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في أ ، أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ١٠ سم
أوجد قيمة : حا ب حتا حـ + حتا ب حا حـ

(ب) **أثبت أن :** المستقيم الذي يمر بالنقطتين (٤$\sqrt{٣}$ ، ٥) ، (٣$\sqrt{٣}$ ، ٤) **يوازي** المستقيم الذي يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٣٠°

---

٤ ⇐ (أ) **أوجد معادلة المستقيم** الذي يمر بالنقطة (٤ ، ٣) وعمودي على المستقيم ٢س + ص + ٧ = ٠

(ب) **أوجد ق(∠ هـ) التي تحقق المعادلة :** ٢حتا هـ = طا٢ ٦٠° - ٤ حا ٣٠°

---

٥ ⇐ (أ) **أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٥) ، (-١ ، ٣)**

(ب) أ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه أ(٣ ، ٢) ، ب(٤ ، -٥) ، حـ(٠ ، -٣)
أوجد إحداثي نقطة تقاطع قطريه هـ ، **ثم أوجد** إحداثيي نقطة ء